

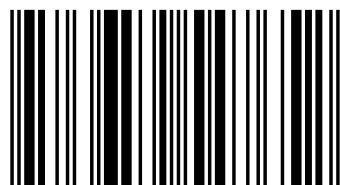
Толстостенные прямоугольные пластины широко используются в различных отраслях техники в качестве элементов конструкций и деталей машин. При расчёте прочности таких конструкций необходимо иметь информацию об их напряжённо-деформированном состоянии. При определении напряжённо-деформированного состояния важно учитывать тип крепления конструкции. Во многих случаях присутствует жесткое закрепление боковых граней конструкции, что автоматически влечет за собой необходимость использования численных методов расчета напряженно-деформированного состояния таких конструкций. Одним из таких методов есть метод сплайн-аппроксимации в двух координатных направлениях.

НДС анизотропного односвязного тела



Антон Бергулев

к. ф.-м.н. по специальности 01.02.04 - механика деформированного твердого тела



978-3-659-54765-2

Бергулев

Антон Бергулев

Напряженное состояние прямоугольных анизотропных пластин

LAP LAMBERT Academic Publishing

Антон Бергулев

Напряженное состояние прямоугольных анизотропных пластин

Антон Бергулев

**Напряженное состояние
прямоугольных анизотропных
пластин**

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:

LAP LAMBERT Academic Publishing

ist ein Imprint der / является торговой маркой

OmniScriptum GmbH & Co. KG

Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия

Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /

Напечатано: см. последнюю страницу

ISBN: 978-3-659-54765-2

Zugl. / Утверд.: Киев, 2012

Copyright / АВТОРСКОЕ ПРАВО © 2014 OmniScriptum GmbH & Co. KG

Alle Rechte vorbehalten. / Все права защищены. Saarbrücken 2014

Название книги: “Определение напряженного состояния
прямоугольных анизотропных пластин в пространственной
постановке”

План:

| | |
|--|----|
| Введение | 3 |
| Раздел 1. Обзор исследований по решению задач о напряженно-деформированном состоянии прямоугольных пластин и оболочек | 9 |
| 1.1. Общая характеристика подходов к решению задач статики пластин .. | 9 |
| 1.2. Методы решения задач статики пластин и оболочек | 13 |
| 1.2.1 Аналитические методы | 13 |
| 1.2.2 Численные методы | 15 |
| 1.3. Характеристика подходов к решению задач статики прямоугольных ортотропных и анизотропных пластин | 19 |
| 1.4. Решение задач теории упругости с применением сплайн-функций .. | 20 |
| 1.4.1 Решение двухмерных задач статики пластин с применением сплайн-функций | 22 |
| 1.4.2 Решение пространственных задач с применением сплайн-функций | 22 |
| 1.5. Решение задач теории упругости для неоднородных материалов .. | 23 |
| Раздел 2. Основные уравнения трехмерной теории пластин | 24 |
| 2.1. Общие уравнения трехмерной теории упругости в ортогональной системе координат | 24 |
| 2.2. Уравнения трехмерной теории упругости для изотропного, ортотропного и анизотропного тела с одной плоскостью упругой симметрии | 27 |
| 2.3. Разрешающая система уравнений статики толстостенных ортотропных прямоугольных пластин | 31 |
| 2.4. Разрешающая система уравнений статики толстостенных анизотропных прямоугольных пластин с одной плоскостью упругой симметрии | 33 |
| Выводы | 36 |
| Раздел 3. Решение трехмерных краевых задач статики прямоугольных ортотропных пластин на основе сплайн-аппроксимации | 37 |
| 3.1. Некоторые сведения о применении сплайн-функций | 37 |
| 3.2. Сведение трехмерной краевой задачи к одномерной при помощи сплайн-аппроксимации | 40 |
| 3.3. Решение одномерных краевых задач методом дискретной ортогонализации | 46 |
| 3.4. Постановка граничных условий | 53 |

| | | |
|------------------|---|------------|
| 3.5 | Описание алгоритма решения задач статики ортотропных прямоугольных толстостенных пластин | 63 |
| | Выводы | 68 |
| Раздел 4. | Анализ напряженно-деформированного состояния прямоугольных толстостенных пластин | 69 |
| 4.1 | Некоторые оценки достоверности результатов решения классов рассматриваемых задач | 69 |
| 4.2 | Анализ напряженно-деформированного состояния изотропных прямоугольных толстостенных пластин | 82 |
| 4.3 | Анализ напряженно-деформированного состояния ортотропных прямоугольных толстостенных пластин | 95 |
| 4.4 | Анализ напряженно-деформированного состояния анизотропных прямоугольных толстостенных пластин с одной плоскостью упругой симметрии | 101 |
| | Выводы | 106 |
| Раздел 5. | Расчет напряженно-деформированного состояния конечноэлементной композитной анизотропной области с различными граничными условиями на поверхности | 107 |
| 5.1 | Исходные соотношения | 107 |
| 5.2 | Случай неоднородного ортотропного материала | 111 |
| 5.3 | Постановка задачи | 112 |
| 5.4 | Метод решения | 113 |
| | Выводы | 115 |
| | Выводы | 116 |
| | Список использованной литературы | 118 |

Введение

Толстостенные прямоугольные пластины широко используются в различных отраслях техники в качестве элементов конструкций и деталей машин. При расчёте прочности таких конструкций необходимо иметь информацию об их напряжённо-деформированном состоянии. При определении напряжённо-деформированного состояния важно учитывать тип крепления конструкции. Во многих случаях присутствует жесткое закрепление боковых граней конструкции, что автоматически влечет за собой необходимость использования численных методов расчета напряжённо-деформированного состояния таких конструкций. Одним из таких методов есть метод сплайн-аппроксимации в двух координатных направлениях.

Актуальность темы. В последнее время использование современных композитных материалов тянет за собой необходимость исследования прочности и надежности конструкций с учетом анизотропии материала. Поэтому получение достоверной информации о напряжённо-деформированном состоянии толстостенной анизотропной пластины при различных граничных условиях и проведение анализа влияния механических и геометрических параметров на распределение полей перемещений и напряжений в пластинах представляет собой важную научно-техническую задачу.

Для исследования напряжённо-деформированного состояния анизотропных прямоугольных пластин широко используются различные приближенные теории пластин. Но во многих случаях размеры пластины и её упругие свойства требуют использования трехмерной теории упругости. Использование такой модели даёт возможность решения широкого класса задач о напряжённо-деформированном состоянии анизотропных прямоугольных пластин, а также провести оценку достоверности использования различных двумерных теорий пластин.

Для решения задач статики анизотропных пластин в двумерной постановке существует много различных эффективных методов, тогда как для задач статики анизотропных пластин в трехмерной постановке таких методов немного.

Это связано с существенными трудностями вычислительного характера. И поэтому решение соответственных граничных задач, которые описывают напряженно-деформированное состояние анизотропных толстостенных пластин в трехмерной постановке требует использования современных численно-аналитических методов.

Поэтому разработка эффективного подхода к решению задач о напряженно-деформированном состоянии анизотропных толстостенных прямоугольных пластин при различных граничных условиях на боковых сторонах под действием распределенного напряжения является актуальной проблемой и имеет значительный теоретический интерес и практическое значение.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Исследования, приведенные в работе, выполнены в соответствии с научными темами 1.3.1.370-09 “Разработка новых подходов к исследованию деформирования сложных систем оболочек из неоднородных анизотропных материалов при разных видах нагрузок на основании методов численного анализа” (№ ДР 0109U004184) и 1.3.1.510п-11 “Разработка подхода на основании сплайн-аппроксимации к исследованию свободных колебаний полых цилиндров с переменными параметрами в пространственной постановке” (№ДР 0111U007251).

Цель и задачи исследования. Цель и задачи этого исследования можно сформулировать так:

- разработка эффективного подхода к численному решению трехмерных задач статики изотропных, ортотропных, анизотропных с одной плоскостью упругой симметрии и неоднородных прямоугольных толстостенных пластин под действием распределенной нагрузки на основе сплайн-аппроксимации в двух направлениях; разработка метода расчета напряженно-деформированного состояния конечноэлементной композитной анизотропной области с различными граничными условиями на поверхности;

- построение алгоритма и реализация на ПК программного комплекса для численного решения задач указанного класса, который даст возможность проводить исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных толстостенных пластин с учетом изменения геометрических и механических параметров;
- решение разных классов задач на основе подхода, который предлагается, а также проведение анализа напряженно-деформированного состояния изотропных, ортотропных, анизотропных с одной плоскостью упругой симметрии и неоднородных прямоугольных толстостенных пластин в зависимости от геометрических и механических параметров, изменения толщины и нагрузки при разных вариантах закрепления краев.

Объектом исследования является статическое состояние толстостенных изотропных, ортотропных, анизотропных с одной плоскостью упругой симметрии и неоднородных прямоугольных пластин (раздел 1-4), а также конечноэлементных композитных анизотропных областей, которые находятся под действием распределенной нагрузки при различных типах граничных условий на боковых гранях.

Предметом исследования являются поля напряжений и перемещений пластин и областей указанного класса, которые зависят от механических параметров, толщины, различных граничных условий и нагрузки.

Методы исследования: исследования проводились в рамках классической теории упругости, которая основана на законе Гука, из исходных уравнений получена трехмерная краевая задача для системы уравнений в частных производных, которая сводится к одномерной методом сплайн-коллокации в двух направлениях, а последняя решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации.

Научная новизна полученных результатов заключается в следующих положениях:

- на основании уравнений трехмерной теории упругости выведены разрешающие системы трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которые описывают напряженно-деформированное состояние изотропных, ортотропных, анизотропных с одной плоскостью упругой симметрии и неоднородных прямоугольных толстостенных пластин, и сформулированы различные варианты граничных условий на краях в такой форме, которая позволяет провести аппроксимацию решений, используя В-сплайны третьей степени в двух направлениях;
- разработан эффективный подход к решению задач статики изотропных, ортотропных и анизотропных с одной плоскостью упругой симметрии прямоугольных толстостенных пластин под действием ортогональной нагрузки для разных вариантов граничных условий, механических и геометрических параметров, который базируется на сплайн-аппроксимации решений в двух направлениях, что позволяет свести трехмерную задачу к одномерной, и применении устойчивого численного метода дискретной ортогонализации для решения одномерной краевой задачи, который реализован в программном комплексе на ПК;
- проведено решение задач данного класса и исследовано напряженно-деформированное состояние прямоугольных толстостенных пластин при изменении геометрических и механических параметров, нагрузке и граничных условий, обнаружен ряд закономерностей в распределении полей перемещений и напряжений.
- разработан метод расчета напряженно-деформированного состояния конечноэлементной композитной анизотропной области с различными граничными условиями на поверхности.

Достоверность полученных в работе результатов достигается использованием обоснованной математической модели теории упругости, корректностью формулировки задачи, тестированием разработанного подхода на

ряде задач данного класса и сравнением результатов для частным образом поставленных задач с результатами, полученными методом разложения в ряды Фурье для случая шарнирно опертого края и результатами, полученными в рамках двухмерной теории для случая жесткой заделки.

Научное значение работы состоит в том, что проведено решение широкого класса новых задач о напряженно-деформированном состоянии толстостенных анизотропных пластин и композитных неоднородных областей при помощи разработанного численно-аналитического подхода на основе сплайн-аппроксимации.

Практическое значение полученных результатов. Результаты решения задач статики изотропных, ортотропных и анизотропных с одной плоскостью упругой симметрии прямоугольных толстостенных пластин, на основе эффективного алгоритма, который реализован в программном комплексе на языке FORTRAN для ПК, и анализ напряженно деформированного состояния пластин указанного класса в зависимости от изменения геометрических и механических параметров, нагрузки и условий закрепления контуров могут быть использованы в научно-исследовательских организациях и конструкторских бюро для проведения расчетов и оценки прочности и надежности элементов конструкций.

В работах [1-2] опубликованных в соавторстве с научным руководителем и к.ф.-м.н. Яремченко С.Н., автору книги принадлежит выведение разрешающих уравнений для случая изотропной и ортотропной пластины, построение алгоритма и его реализация в программном комплексе на ПК, решение конкретных задач, соавторам принадлежит постановка задач и методика их решения, анализ результатов.

В работе [3] опубликованной в соавторстве с научным руководителем, ему принадлежат постановка задач и методика их решения, анализ результатов.

Результаты, полученные в разделе 5 данной книги полностью принадлежат автору.

Апробация результатов. Основные результаты, опубликованные в книге, докладывались и обсуждались на:

1. Международной математической конференции (Украина, Днепропетровск-Днепродзержинск, 2008);
2. Международной научной конференции «Математичні проблеми механіки» (Украина, Днепропетровск-Днепродзержинск, 2009);
3. Международной научной конференции «Математичні проблеми технічної механіки 2010» (Украина, Днепродзержинск, 2010)
4. Пятнадцатой международной конференции «Dynamical System Modelling and Stability Investigation» (Украина, Киев, 2011)
5. Четвертой международной конференции им. Академика И.И.Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика» (Украина, Киев, 2011)

Публикации. По результатам, представленным в книге, опубликовано девять работ, в том числе: четыре статьи в специализированных журналах [1-4], которые входят в перечень ВАК Украины, а также пять публикаций в материалах конференций [5-9].

Автор искренне благодарит научного руководителя доктора физико-математических наук, профессора Григоренко Александра Ярославовича за постановку задачи, полезные советы и помощь при выполнении работы.

Раздел 1. Обзор исследований по решению задач о напряженно-деформированном состоянии прямоугольных пластин

1.1. Общая характеристика подходов к решению задач статики пластин и оболочек

С момента возникновения теории упругости исследования в области пространственных задач характеризовались большим разнообразием используемых подходов на основе численных и аналитических методов решения краевых задач.

Предметом многих исследований издавна были задачи о деформации пластин и оболочек. Эти задачи были в числе тех проблем, постановка и разрешение которых привели к созданию теории упругости [9].

Задачи, которые возникают при расчете пластин, можно рассматривать на основе разнообразных подходов. Во многих случаях применение классической теории недеформируемых нормалей приводит к удовлетворительным результатам. Но для неоднородных по толщине пластин, пластин, подверженных действию локальных нагрузок, тонких пластин и т.п. результаты, полученные в рамках классической двумерной теории, являются недостаточно точными. Для такого рода задач трехмерная модель дает намного более точные результаты.

Один из возможных подходов заключается в представлении искомых функций в виде рядов по нормальной координате. Кроме степенных рядов используются также разложения по полиномам Лежандра и тригонометрическим функциям [11-18]. Такой подход приводит к последовательности краевых задач, порядок которых зависит от числа удерживаемых членов.

И.Н. Векуа построена общая теория оболочек переменной толщины, основанная на разложениях искомых перемещений и напряжений в ортогональные ряды Фурье по полиномам Лежандра [11-13]. Данный способ приводит к системам дифференциальных уравнений, согласованных с краевыми условиями на лицевых поверхностях оболочки.

Н.А. Кильчевским предложен метод приведения трехмерной задачи к двумерной на основе разложения всех перемещений в степенные ряды по

нормальной координате с последующим применением функциональных соотношений теоремы о взаимности работ [17,18].

Сложность решения задач статики пластин в пространственной постановке приводит к разработке различных приближенных методов, базирующихся на упрощенных предположениях физического характера. Такие подходы позволяют решать разнообразные классы задач, для которых принятые допущения являются оправданными.

Различные способы учета тех или иных факторов вызвали большое разнообразие подходов к построению уточненных моделей. Их общей чертой является учет деформаций поперечного сдвига во всех или отдельных слоях. Вопросы разработки и применения уточненных моделей оболочек освещены в обзорах [19-26].

Наряду с однослойными широко применяются многослойные пластины. Проблема построения теорий для пластин со слоями различной природы значительно усложняется. Пластины слоистой структуры характеризуются большим числом геометрических и механических параметров, чем однослойные. В связи с этим для многослойных пластин возможно введение большего количества вариантов гипотез о характере распределения напряжений и перемещений по толщине пакета и о значимости тех или иных параметров. Обзор различных подходов к построению теории слоистых пластин изложен в статье [24].

Для класса задач теории трехслойных пластин развиты различные уточненные модели, общим для которых является учет деформаций поперечного сдвига в среднем слое (заполнителе) [27,28].

Некоторые результаты по теории трехслойных пластин симметричной и несимметричной структуры получены Э.И. Григолюком [29]. В работе [30] дан обзор развития теории слоистых пластин. Подробно рассмотрены наиболее распространенные схемы двухслойных и трехслойных пластин. Выделены основные направления развития теории многослойных пластин. Предложена классификация математических моделей многослойных оболочек по методам

приведения трехмерной задачи теории упругости к двумерным задачам теории оболочек, по характеру применяемых кинематических и статических гипотез и по порядку получающихся при этом дифференциальных уравнений. Проанализированы основные результаты исследования напряженно – деформируемого состояния и устойчивости слоистых пластин при статическом нагружении.

Л.П. Хорошун рассматривал вопрос о сведении трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин и оболочек, исходя из представления об однородном напряженном состоянии тонкостенного элемента произвольной по толщине структуры [31].

В работе А.О. Рассказова [32] предложена прикладная теория многослойных ортотропных пологих оболочек, составленных из слоев постоянной толщины, учитывающая деформации сдвига и обжатия, а также поперечные нормальные напряжения. Принимается единое для всего многослойного пакета распределение касательных и поперечных нормальных напряжений. Изменение поперечных нормальных деформаций задается отдельно независимой функцией.

В работах [33,34] на основе сдвиговой теории второго приближения исследовалось напряженно-деформированное состояние пологих оболочек.

В работах [35,36] рассматриваются уравнения теории оболочек с начальными приближениями.

Приводится возможный вариант построения теории толстых упругих оболочек в статье [37] на основе двумерной модели для линейно-упругих толстых оболочек и дается анализ полученных уравнений.

Некоторые классы задач теории упругости рассматриваются в работах [38-45].

В ряде случаев упрощающие предположения не являются столь очевидными и обоснованными. Тогда для определения напряженно – деформированного состояния оболочек необходимо использовать точные уравнения теории упругости.

Трехмерные модели неоднородных оболочек рассмотрены в работе [46]. Необходимость построения таких моделей связана с существованием больших градиентов напряжений и перемещений, значительной анизотропией упругих свойств, с локальным характером воздействий, а также динамическим характером задачи. В этих случаях соответствующие математические модели можно построить при помощи аналитических методов, например, метода начальных функций.

Решение задач о напряженно – деформируемом состоянии неоднородных полых упругих тел в пространственной постановке проводится на основании сочетания различных аналитических преобразований, что позволяет исходную трехмерную задачу свести к одномерной, относительно определенным образом выбранных разрешающих функций. Решение полученной краевой задачи осуществляется методами численного анализа.

Точные решения задач статики упругих тел в трехмерной постановке, полученные в аналитическом виде [47], основаны на использовании на всех этапах решения соответствующих аналитических преобразований и специальных функций. Таким путем получено решение задач для однородных однослойных тел.

Пространственные задачи для неосесимметрично нагруженных полых сфер из дискретно или непрерывно неоднородного материала рассмотрены в работах [48-50].

Решение общей задачи о равновесии однородного изотропного конуса дано в работах [51,52]. В статье [53] рассматривается осесимметричное напряженное состояние сплошного и полого изотропного конусов под действием нагрузок, изменяющихся по полиномиальному закону.

Результаты решения задачи Ламе для полого конуса, нагруженного равномерным внутренним давлением или находящегося под действием температуры, изменяющейся только по толщине, приведены в работе [54].

Решению задач статики неоднородного изотропного конуса посвящены исследования [55,56]. В [49] рассматривается один из подходов к решению задач

о напряженно – деформируемом состоянии бесконечного полого многослойного конуса под действием симметричных и несимметричных нагрузок, изменяющихся по полиномиальному закону.

Вопросы устойчивости по двум мерам сжатых осевыми силами упругих цилиндрических тел рассматривались в работе [57].

Составные оболочки рассматривались в работе [58].

Исследованию напряженно - деформируемого состояния упругих тел на основании гетерогенной математической модели посвящена статья [59].

1.2. Методы решения задач статики пластин и оболочек.

Наряду с построением различных моделей, не менее важной проблемой является совершенствование и развитие методов решения краевых задач о напряженном состоянии упругих тел. Для решения указанного класса задач существует ряд методов, которые можно разбить на два класса: аналитические и численные. Остановимся на каждом классе в отдельности.

1.2.1. Аналитические методы. Для расчета напряженно – деформированного состояния трехмерных упругих тел различной формы при наличии неоднородности материала, которые подвержены действию неравномерных силовых нагрузок, применяются приближенные аналитические методы, к которым следует отнести методы возмущений, разложений по параметру, последовательных приближений, асимптотический метод и др.

Распространенным аналитическим методом решения указанной проблемы является асимптотический. Он основан на выделении уравнений, описывающих основное, медленно изменяющееся напряженное состояние, и местные, быстро затухающие состояния вблизи возмущающих факторов, краевые эффекты. Метод получил развитие в работах И.И. Воровича [60] и А.Л. Гольденвейзера [61].

В работах [11,18,62] получил развитие аналитический метод приведения трехмерной задачи к двумерной, основанный на разложении искомым функций в ряды по толщине оболочки, т.е. по малому геометрическому параметру [63].

Н.А. Кильчевский в монографии [18] развил метод разложения искомым функций в тензорные ряды. В частности, построены уравнения движения двухслойной оболочки.

Работы Ю.Н. Подильчука и др. [64,65] посвящены разработке приближенного метода решения пространственных краевых задач теории упругости для ортогональных областей, близких к эллипсоиду вращения. При этом используются точные решения некоторых внутренних и внешних трехмерных статических задач теории упругости для эллипсоидальных областей.

Одним из основных методов решения пространственных задач теории упругости для изотропного тела является метод Фурье [66], который основывается на применении криволинейных систем координат с последующим разделением переменных в этих системах координат в соответствующих дифференциальных уравнениях. При этом общее решение исходной задачи представляется через функции напряжений, вследствие чего, решение исходной задачи сводится к решению более простых дифференциальных уравнений отдельно для каждой функции напряжений. Для построения решений также используются известные классические решения в форме гармонических функций. Если коэффициенты указанных рядов определяются в явном виде, то решение считается точным.

В работах [67,68] на основе метода Фурье был предложен способ построения точных решений пространственных задач теории упругости изотропного тела в различных криволинейных координатах и на его основе получены решения ряда конкретных задач.

Изложенный в работе [69] Ю.Н. Немишем приближенный аналитический подход использован для получения аналитических и численных решений ряда конкретных пространственных краевых задач для поперечно и продольно

гофрированных изотропных цилиндров и гофрированных сферических тел, находящихся под действием статических внешних усилий [70,71].

В работах [72,73] с помощью метода малого параметра получено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии толстостенных слоистых тел вращения, близких к сферическим. При этом считалось, что слои однородные и изотропные, поэтому в каждом приближении использовалось представление общего решения в форме Папковича – Нейбера.

Расчет слоистых оболочек на основе метода гипотез проводится в двух направлениях: 1) для вывода уравнений применяются кинематические гипотезы для каждого отдельного слоя, при этом порядок уравнений зависит от количества слоев [74]; 2) вывод уравнений дается на основе гипотез, привлекаемых для всего пакета слоев в целом, порядок не зависит от количества слоев [49,75].

В работе [76] рассмотрена задача о напряженно - деформируемом состоянии полых и неполых достаточно длинных упругих неоднородных цилиндров в неравномерном температурном поле для произвольного закона изменения модуля упругости, коэффициента Пуассона и температурных параметров. Процесс деформирования описывается дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, решение которых осуществляется методом частичной дискретизации.

Одним из методов исследования пространственных задач теории упругости является метод сингулярных интегральных уравнений. С его помощью доказаны все основные теоремы существования и единственности решений краевых задач статики и установившихся колебаний упругого тела, созданы алгоритмы численного решения ряда задач теории упругости для однородных тел и тел, составленных из однородных частей с различными условиями сопряжения на границе раздела [77-79].

1.2.2. Численные методы. Для решения класса задач теории оболочек, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, либо для таких,

которые сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [80] применяются различные численные методы.

Метод конечных разностей (МКР). Для решения краевых задач о деформации оболочек вращения произвольного очертания применяется МКР, с помощью которого одномерная краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Вследствие того, что в задачах теории оболочек имеют место локальные и краевые эффекты их напряженного состояния, полученная система может оказаться плохо обусловленной. Для решения таких систем применяют метод разностной прогонки [81,82]. Я. М. Григоренко [83] МКР получены решения для конических оболочек переменной жесткости при антисимметричных нагрузках, у которых с уменьшением угла раствора конуса собственные числа матрицы системы уравнений становятся существенно различными, что приводит к неустойчивости счета, и в этих случаях для решения задачи применялся метод разностной прогонки [81,82].

Метод конечных элементов (МКЭ). Первые разработки по решению задач для оболочек вращения при осесимметричных нагрузках с помощью МКЭ были выполнены зарубежными авторами [84]. При этом рассматривались оболочки вращения определенной формы, и для их расчета предлагались различные конечно-элементные построения. МКЭ находит более широкое применение при решении двумерных задач теории оболочек.

Довольно часто для исследования напряженного состояния толстостенных оболочек МКЭ в качестве конечных элементов используются тетраэдры. В работе [85] для исследования объемно-напряженного состояния тела толстостенных оболочек использовался тетраэдр с четырьмя узловыми точками в локальной системе координат. За узловые неизвестные тетраэдрального конечного элемента выбирались компоненты вектора перемещения в направлениях осей координат и их первые производные.

В задачах прочности, динамики и устойчивости пластин, дисков, оболочек (тонких, средней толщины и толстых), массивных осесимметричных и пространственных тел, комбинированных конструкций и других механических

систем [86,87] применяется моментная схема конечных элементов (МСКЭ). Впервые концептуальные основы МСКЭ были изложены А.С. Сахаровым в [88], а систематически в полном объеме теоретические основы были представлены в [87].

Для определенного класса пространственных тел (осесимметричных, с циклической симметрией, неоднородных, протяженных и пр.) применяется комбинированный подход на основе сочетания МКЭ и метода разделения переменных. Этот подход получил название полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ) [89-92]. Как правило, при разработках, посвященных исследованию тел вращения на основе ПМКЭ, в качестве системы координатных функций (в окружном направлении) используются ряды Фурье. Основные положения МКЭ используются в качестве базы для развития методики вывода матриц жесткости универсальных конечных элементов в рамках ПМКЭ [93].

Метод интегральных уравнений. В работах И. А. Биргера [94] рассмотрен класс задач о напряженно-деформированном состоянии оболочек вращения под действием осесимметричных и антисимметричных нагрузок. Задача описывается с помощью модифицированных краевых и нормальных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра, что упрощает их построение из исходных дифференциальных соотношений. Полученные интегральные уравнения решаются с помощью итерационных численных методов. Для решения плохо обусловленных задач применяется метод интегральных уравнений в сочетании с методом ортогональной прогонки [95].

Методы сведения к задачам Коши. В силу линейности рассматриваемого класса задач о деформации оболочек вращения для нахождения решения можно использовать обычный метод сведения краевой задачи к ряду задач Коши [96], каждая из которых решается одним из численных методов (Рунге — Кутта, Адамса — Штермера и др.). Однако при этом, как уже отмечалось, вследствие краевых и локальных эффектов, имеющих место в тонких оболочках, указанный подход может оказаться непригодным, так как счет становится неустойчивым

[96,97]. В указанных случаях задача становится жесткой [98]. Для преодоления отмеченных трудностей разработан ряд методов, с помощью которых численное решение краевой задачи сводится к устойчивому вычислительному процессу. К таким методам относятся: метод прогонки в дифференциальной форме, предложенный И. М. Гельфандом и О. В. Локуциевским [82], метод непрерывной ортогонализации А. А. Абрамова [86], метод дискретной ортогонализации С. К. Годунова [99].

Метод дифференциальной прогонки [82, 96] заключается в эквивалентной замене краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений рядом задач Коши для систем нелинейных дифференциальных уравнений и их решении численным методом. При этом получают устойчивые процессы на прямом и обратном ходе. Некоторые аспекты метода дифференциальной прогонки применительно к решению задач строительной механики изложены в статье В. Л. Бидермана [100]. При применении данного метода могут возникать трудности, связанные с неограниченным ростом элементов прогоночных матриц [101].

Метод непрерывной ортогонализации [86] основан фактически на непрерывной ортогонализации векторов-решений задач Коши по мере изменения аргумента и позволяет осуществить перенос любого числа граничных условий. В данном методе, в отличие от предыдущего, не происходит рост матриц, но правые части уравнений существенно сложнее, и поэтому его использование требует гораздо большего по объему счета. Некоторые особенности применения этого метода к решению задач теории оболочек впервые рассмотрены в работах Я. М. Григоренко [102,103].

Метод дискретной ортогонализации [97] дает возможность получить устойчивый вычислительный процесс за счет ортогонализации векторов-решений задач Коши в конечном числе точек интервала изменения аргумента. Эффективность и высокая точность метода отмечается также в книге Р. Беллмана и Р. Калабы [104]. В настоящее время метод дискретной ортогонализации широко применяется для решения задач теории оболочек. Алгоритмы расчета различных оболочечных

систем с помощью метода Годунова реализованы в вычислительных комплексах и пакетах программ [105, 106].

В работе [107] получены функции Коши-Крылова, которые позволяют построить простые и весьма эффективные по затратам машинного времени и памяти устойчивые при счете на ЭВМ алгоритмы решения краевых задач для жестких дифференциальных уравнений и получать результаты решения с контролируемой точностью. Для наглядности построены алгоритмы решения задач для жестких дифференциальных уравнений механики деформирования пластин и оболочек.

1.3 Характеристика подходов к решению задач статики прямоугольных ортотропных и анизотропных пластин

Напряженно-деформированному состоянию ортотропных и анизотропных пластин в трехмерной постановке посвящены работы [49], [87]. В этих работах предложены численные, вариационные, аналитические и численно-аналитические подходы к решению задач про напряженно-деформированное состояние ортотропных и анизотропных пластин. Следует отметить, что в большинстве работ, посвященных напряженно-деформированному состоянию неоднородных пластин в трехмерной постановке, рассматривается лишь случай шарнирно-опертых торцов.

Целиком аналитическое решение данного класса задач возможно для определенным образом заданной нагрузки на верхней и нижней гранях и специальным образом заданных компонент интенсивности объемного внешнего напряжения. В общем случае получить аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии прямоугольных пластин в трехмерной постановке невозможно.

К численно-аналитическим методам решения задач данного класса можно отнести метод разложения в ряды Фурье [1,87]. В этом методе искомые функции перемещения раскладываются в ряды по двум координатам, вследствие чего начальная система дифференциальных уравнений в частных производных

сводится к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений относительно третьей координаты которая, в свою очередь, решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации.

Для получения решения задачи о напряженно-деформированном состоянии анизотропных толстостенных прямоугольных пластин в общем виде используют численные и вариационные подходы.

К вариационным подходам следует отнести методы Ритца и Бубнова-Галеркина[87].

К численным методам решения задачи о напряженно-деформированном состоянии толстостенных прямоугольных пластин следует отнести метод Власова-Канторовича[87] и метод сплайн-аппроксимации[1,2,3,87] с последующим решением одномерной краевой задачи методами, указанными в п.1.2, такими, как метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод дискретной ортогонализации.

1.4 Решение задач теории упругости с применением сплайн-функций

В последнее время в задачах вычислительной математики, математической физики и механики для их решения стали широко использоваться сплайн-функции. Это объясняется преимуществами аппарата сплайн-приближений по сравнению с другими [154].

Большую область для использования сплайн-аппроксимаций представляют задачи теории деформированных упругих тел. Здесь сплайн-функции могут быть эффективно применены для решения одномерных и двумерных задач теории оболочек и пластин, двумерных и трехмерных задач теории упругости.

Для решения одномерных задач или сводящихся к ним, описывающих изгиб, устойчивость и колебания пластин и оболочек, в некоторых работах [155-157] решение аппроксимируется сплайнами третьей и пятой степени и задача сводится к системе алгебраических уравнений. При этом в [158] при исследовании напряженно-деформированного состояния цилиндрических

пологих оболочек для описания полей прогибов применяются В-сплайны пятой степени, а для тангенциальных перемещений – В-сплайны третьей степени и построенные фундаментальные системы функций удовлетворяют заданным граничным условиям.

В ряде двумерных задач о напряженно-деформированном состоянии и колебаниях пластин и оболочек при определенных граничных условиях задача сводится к одномерной с помощью какого-либо вариационного или проекционного метода, а решение последней находится с помощью сплайн-функций [159].

Кроме указанных подходов для решения двумерных краевых задач теории пластин и оболочек, также применяются подходы, основанные на аппроксимации искомого решения в виде отрезка ряда по двумерным сплайнам [159] или произведениям одномерных сплайнов [160] и решению системы линейных алгебраических уравнений. В работе [161] дан обзор использования сплайн-функций в различных полуаналитических, дискретных, вариационных и смешанных методах решения задач статики, колебаний и устойчивости пластин и оболочек. При этом основное внимание уделено применению сплайнов в методах конечных элементов, конечных полос и граничных элементов.

В работе [162] обсуждаются результаты исследований по проблеме сплайн-функций для вычисления геометрических параметров поверхности в задачах теории оболочек неканонической формы. Предложены эффективные приемы снижения осцилляций интерполирующего и сглаживающего сплайна. Работа [163] посвящена разработке метода аппроксимации срединных поверхностей оболочек произвольной формы с применением вектор-сплайнов, для построения которых применено интегральное тождество.

Сплайны часто находят применение в построении сплайновых вариантов МКЭ [164, 165]. В работах [166, 167] сплайны используются для построения смешанных методов конечных элементов.

В отделе численных методов Института механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины был разработан и успешно применяется метод сплайн-коллокации

для понижения размерности исходных дифференциальных уравнений в частных производных теории оболочек [168].

1.4.1 Решение двумерных задач статики пластин с применением сплайн-функций

В случае наличия двумерной задачи статики пластин метод сплайн-аппроксимации позволяет свести исходную двумерную задачу, которая как правило описывается дифференциальным уравнением в частных производных к одномерной [87]. Данная одномерная задача является системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями. Сплайн-аппроксимация совершается по одной пространственной координате. Выбор сплайн-функций зависит от порядка начального дифференциального уравнения в частных производных. Для обеспечения непрерывной аппроксимации порядок сплайн-функций должен на единицу превышать порядок начального дифференциального уравнения.

1.4.2 Решение трехмерных задач статики пластин с применением сплайн-функций

В случае наличия трехмерной задачи статики пластин метод сплайн-аппроксимации позволяет свести исходную трехмерную задачу, которая как правило описывается дифференциальным уравнением или же системой дифференциальных уравнений в частных производных к одномерной [1-3]. Данная одномерная задача является системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями. Сплайн-аппроксимация совершается по двум пространственным координатам. Выбор сплайн-функций зависит от порядка начального дифференциального уравнения в частных производных (или системы дифференциальных уравнений). Для обеспечения непрерывной аппроксимации порядок сплайн-функций должен на единицу превышать порядок начального дифференциального уравнения (или системы уравнений)

1.5 Решение задач теории упругости для неоднородных материалов

Обзор методов решения задач о напряженно-деформированном состоянии неоднородных пластин и оболочек представлен в работах [24], [27], [28], [32]. В них как правило рассматриваются слоистые пластины и оболочки. В данной работе предложен способ решения задачи о напряженно-деформированном состоянии однослойной неоднородной по одной из пространственных координат пластины. Данная задача описывается системой трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с переменными по одной из пространственных координат коэффициентами.

Раздел 2. Основные уравнения трехмерной теории пластин

2.1 Общие уравнения трехмерной теории упругости в ортогональной системе координат

В общем случае будем рассматривать упругие оболочки, составленные из анизотропных неоднородных слоев.

В криволинейной системе координат положение какой-либо точки M пространства однозначно определяется тремя числами α , β , γ . Эти величины, называемые криволинейными координатами, связаны с декартовыми координатами x , y , z функциональными соотношениями

$$\alpha = \alpha(x, y, z), \quad \beta = \beta(x, y, z), \quad \gamma = \gamma(x, y, z). \quad (2.1.1)$$

Так как положение точки M в пространстве является вполне определенным, когда заданы α , β , γ , то также имеют место обратные зависимости:

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma), \quad y = y(\alpha, \beta, \gamma), \quad z = z(\alpha, \beta, \gamma) \quad (2.1.2)$$

где x , y , z – однозначные функции параметров α , β , γ , непрерывные вместе со своими первыми производными.

В таких системах координат выражение для квадрата длины линейного элемента имеет вид:

$$ds^2 = H_1^2 d\alpha^2 + H_2^2 d\beta^2 + H_3^2 d\gamma^2 \quad (2.1.3)$$

Величины H_1 , H_2 , H_3 являются в общем случае функциями координат α , β , γ . Их называют коэффициентами или параметрами Ляме.

Параметры Ляме определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Перемещение точек при деформации тела под действием приложенных нагрузок характеризуется величинами $u_\alpha(\alpha, \beta, \gamma)$, $u_\beta(\alpha, \beta, \gamma)$, $u_\gamma(\alpha, \beta, \gamma)$,

представляющими собой проекции вектора полного перемещения на направления касательных к координатным линиям α , β , γ соответственно.

Деформация тела описывается величинами e_α , e_β , e_γ , $e_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\gamma}$, $e_{\beta\gamma}$. Первые три из указанных величин представляют собой относительные линейные деформации по направлениям координатных линий. Остальные величины являются относительными сдвигами, происходящими в касательных в рассматриваемой точке к координатным поверхностям плоскостях. Для составляющих деформации имеются следующие формулы, выражающие их связь с перемещениями, называемые геометрическими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 e_\alpha &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} u_\beta + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} u_\gamma \\
 e_\beta &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} u_\alpha \\
 e_\gamma &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \beta} u_\beta \\
 e_{\alpha\beta} &= \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H_1} u_\alpha \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H_2} u_\beta \right) \\
 e_{\alpha\gamma} &= \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H_3} u_\gamma \right) + \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{H_1} u_\alpha \right) \\
 e_{\beta\gamma} &= \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{H_2} u_\beta \right) + \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H_3} u_\gamma \right)
 \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Напряженное состояние тела в принятой системе координат характеризуется величинами σ_α , σ_β , σ_γ , $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\beta\alpha}$, $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\gamma\alpha}$, $\tau_{\beta\gamma}$, $\tau_{\gamma\beta}$. Здесь σ_α , σ_β , σ_γ - нормальные напряжения, действующие на площадках, перпендикулярных координатным линиям α , β , γ соответственно. Остальные величины представляют собой касательные напряжения, действующие по указанным площадкам. Из закона парности касательных напряжений следует, что $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$, $\tau_{\alpha\gamma} = \tau_{\gamma\alpha}$, $\tau_{\beta\gamma} = \tau_{\gamma\beta}$.

Уравнения равновесия пластины записываются в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 H_3 \sigma_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 H_3 \tau_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2 \tau_{\alpha\gamma}) - \sigma_\beta H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} - \sigma_\gamma H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} + \tau_{\alpha\beta} H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \\
& \tau_{\alpha\gamma} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} + F_\alpha H_1 H_2 H_3 = 0; \\
& \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 H_3 \sigma_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2 \tau_{\beta\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 H_3 \tau_{\alpha\beta}) - \sigma_\gamma H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \beta} - \sigma_\alpha H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \tau_{\beta\gamma} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} + \\
& \tau_{\alpha\beta} H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + F_\beta H_1 H_2 H_3 = 0; \\
& \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2 \sigma_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 H_3 \tau_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 H_3 \tau_{\beta\gamma}) - \sigma_\alpha H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} - \sigma_\beta H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} + \tau_{\alpha\gamma} H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} + \\
& \tau_{\beta\gamma} H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \beta} + F_\gamma H_1 H_2 H_3 = 0;
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Здесь $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$ – проекции вектора объемных сил на направления касательных к координатным линиям α, β, γ .

Соотношения обобщенного закона Гука для анизотропного тела с одной плоскостью упругой симметрии $\gamma = const$, содержащие 13 независимых упругих постоянных, запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
e_\alpha &= \alpha_{11} \sigma_\alpha + \alpha_{12} \sigma_\beta + \alpha_{13} \sigma_\gamma + \alpha_{16} \tau_{\alpha\beta} \\
e_\beta &= \alpha_{12} \sigma_\alpha + \alpha_{22} \sigma_\beta + \alpha_{23} \sigma_\gamma + \alpha_{26} \tau_{\alpha\beta} \\
e_\gamma &= \alpha_{13} \sigma_\alpha + \alpha_{23} \sigma_\beta + \alpha_{33} \sigma_\gamma + \alpha_{36} \tau_{\alpha\beta} \\
e_{\beta\gamma} &= \alpha_{44} \tau_{\beta\gamma} + \alpha_{45} \tau_{\alpha\gamma} \\
e_{\alpha\gamma} &= \alpha_{45} \tau_{\beta\gamma} + \alpha_{55} \tau_{\alpha\gamma} \\
e_{\alpha\beta} &= \alpha_{16} \sigma_\alpha + \alpha_{26} \sigma_\beta + \alpha_{36} \sigma_\gamma + \alpha_{66} \tau_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Коэффициенты α_{ij} этой системы определяются из соотношений:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{1}{E_\alpha}, \quad \alpha_{12} = -\frac{V_{\beta\alpha}}{E_\alpha} = -\frac{V_{\alpha\beta}}{E_\beta}, \quad \alpha_{13} = -\frac{V_{\alpha\gamma}}{E_\gamma} = -\frac{V_{\gamma\alpha}}{E_\alpha}, \\
\alpha_{14} &= -\frac{\eta_{\alpha\beta,\alpha}}{E_\alpha} = -\frac{\eta_{\alpha,\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{E_\beta}, \quad \alpha_{23} = -\frac{V_{\gamma\beta}}{E_\beta} = -\frac{V_{\beta\gamma}}{E_\gamma}, \\
\alpha_{24} &= -\frac{\eta_{\alpha\beta,\beta}}{E_\beta} = -\frac{\eta_{\beta,\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}}, \quad \alpha_{33} = \frac{1}{E_\gamma}, \quad \alpha_{34} = -\frac{\eta_{\alpha\beta,\gamma}}{E_\gamma} = -\frac{\eta_{\gamma,\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}}, \\
\alpha_{44} &= \frac{1}{G_{\alpha\beta}}, \quad \alpha_{55} = \frac{1}{G_{\beta\gamma}}, \quad \alpha_{56} = -\frac{\mu_{\gamma\alpha,\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}} = -\frac{\mu_{\beta\gamma,\gamma\alpha}}{G_{\alpha\gamma}}, \quad \alpha_{66} = \frac{1}{G_{\alpha\gamma}}.
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Здесь:

$E_\alpha, E_\beta, E_\gamma$ – модули упругости по направлениям α, β, γ соответственно;
 $G_{\beta\gamma}, G_{\alpha\gamma}, G_{\alpha\beta}$ – модули сдвига для плоскостей, параллельных координатным плоскостям $\alpha = const, \beta = const, \gamma = const$ соответственно; $\nu_{\beta\alpha}, \nu_{\alpha\beta}, \nu_{\alpha\gamma}, \nu_{\gamma\alpha}, \nu_{\beta\gamma}, \nu_{\gamma\beta}$ – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие при растяжении вдоль осей координат; $\mu_{\gamma\alpha, \beta\gamma}, \mu_{\beta\gamma, \gamma\alpha}$ – коэффициенты, которые характеризуют сдвиги в плоскостях, параллельных координатным плоскостям, обусловленные касательными напряжениями, которые действуют в плоскостях, касательных к другим координатным плоскостям; $\eta_{\alpha\beta, \alpha}, \eta_{\alpha\beta, \beta}, \eta_{\alpha\beta, \gamma}$ – коэффициенты взаимного влияния, которые характеризуют сдвиги в координатных плоскостях, обусловленные нормальными напряжениями; $\eta_{\alpha, \alpha\beta}, \eta_{\beta, \alpha\beta}, \eta_{\gamma, \alpha\beta}$ – коэффициенты взаимного влияния, которые характеризуют удлинения, обусловленные касательными напряжениями.

2.2 Уравнения трехмерной теории упругости для изотропного, ортотропного и анизотропного тела с одной плоскостью упругой симметрии

Рассмотрим уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние изотропного тела.

Статические уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.2.1}$$

где σ_{ij} удовлетворяют закон четности касательных напряжений:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}; \sigma_{xz} = \sigma_{zx}; \sigma_{yz} = \sigma_{zy};$$

Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.2.2}$$

Физические уравнения, которые выражают закон Гука:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G} \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{G} \\
\varepsilon_{zx} &= \frac{\sigma_{zx}}{G}
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Закон Гука в обратной форме:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2G\varepsilon_x + \lambda\Theta \\
\sigma_{yy} &= 2G\varepsilon_y + \lambda\Theta \\
\sigma_{zz} &= 2G\varepsilon_z + \lambda\Theta \\
\sigma_{yz} &= G\varepsilon_{yz} \\
\sigma_{xz} &= G\varepsilon_{xz} \\
\sigma_{xy} &= G\varepsilon_{xy}
\end{aligned} \quad , \quad \lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu} = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} - \text{параметр Ляме} \tag{2.2.4}$$

В случае ортотропного тела закон Гука примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
\varepsilon_x &= \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{zz} \\
\varepsilon_y &= \alpha_{12}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{zz} \\
\varepsilon_z &= \alpha_{13}\sigma_{xx} + \alpha_{23}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{zz} \\
\varepsilon_{yz} &= \alpha_{44}\sigma_{yz} \\
\varepsilon_{xz} &= \alpha_{55}\sigma_{xz} \\
\varepsilon_{xy} &= \alpha_{66}\sigma_{xy}
\end{aligned} \right. \tag{2.2.5}$$

Матрицу $C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{66} \end{pmatrix}$ называют матрицей упругой

податливости. Её элементы определяются через упругие постоянные:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{E_x}; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{E_y}; \quad \alpha_{33} = \frac{1}{E_z};$$

$$\alpha_{12} = -\frac{\nu_{yx}}{E_x} = -\frac{\nu_{xy}}{E_y}; \quad \alpha_{13} = -\frac{\nu_{xz}}{E_z} = -\frac{\nu_{zx}}{E_x}; \quad \alpha_{23} = -\frac{\nu_{zy}}{E_y} = -\frac{\nu_{yz}}{E_z};$$

$$\alpha_{44} = \frac{1}{G_{yz}}; \quad \alpha_{55} = \frac{1}{G_{xz}}; \quad \alpha_{66} = \frac{1}{G_{xy}};$$

E_x, E_y, E_z - модули упругости по направлениям x, y, z соответственно.

G_{yz}, G_{xz}, G_{xy} - модули упругости для плоскостей, параллельных плоскостям

$x = 0, y = 0, z = 0$ соответственно.

$\nu_{yx}, \nu_{xy}, \nu_{xz}, \nu_{zx}, \nu_{zy}, \nu_{yz}$ - коэффициенты Пуассона, которые характеризуют поперечное давление при растяжении в направлениях осей координат; первый индекс характеризует движение сжатия, второй – направление действия силы.

Система уравнений (2.2.5) позволяет рассчитать деформации при известных напряжениях. В ходе решения задач теории упругости возникает необходимость в обратных соотношениях. Они выражают зависимость упругих постоянных от известных деформаций и носят название *закона Гука в обратной форме* и могут быть записаны в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \lambda_{11}\epsilon_x + \lambda_{12}\epsilon_y + \lambda_{13}\epsilon_z \\ \sigma_{yy} = \lambda_{12}\epsilon_x + \lambda_{22}\epsilon_y + \lambda_{23}\epsilon_z \\ \sigma_{zz} = \lambda_{13}\epsilon_x + \lambda_{23}\epsilon_y + \lambda_{33}\epsilon_z \\ \sigma_{yz} = \lambda_{44}\epsilon_{yz} \\ \sigma_{xz} = \lambda_{55}\epsilon_{xz} \\ \sigma_{xy} = \lambda_{66}\epsilon_{xy} \end{array} \right. \quad (2.2.7)$$

Матрицу $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{66} \end{pmatrix}$ называют матрицей жесткости. Её

элементы определяются через элементы матрицы упругой податливости:

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} &= \frac{\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2}{\Delta} & \lambda_{22} &= \frac{\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}^2}{\Delta} & \lambda_{33} &= \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\Delta} \\
\lambda_{12} &= \frac{\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33}}{\Delta} & \lambda_{13} &= \frac{\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}}{\Delta} & \lambda_{23} &= \frac{\alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}}{\Delta} \\
\lambda_{44} &= \frac{1}{\alpha_{44}} & \lambda_{55} &= \frac{1}{\alpha_{55}} & \lambda_{66} &= \frac{1}{\alpha_{66}}
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

$$\Delta = \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2) - \alpha_{12}(\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{23}) + \alpha_{13}(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22})$$

В случае анизотропного тела закон Гука примет вид:

$$\begin{cases}
\varepsilon_x = \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{zz} + \alpha_{14}\sigma_{xy} + \alpha_{15}\sigma_{yz} + \alpha_{16}\sigma_{xz} \\
\varepsilon_y = \alpha_{12}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{zz} + \alpha_{24}\sigma_{xy} + \alpha_{25}\sigma_{yz} + \alpha_{26}\sigma_{xz} \\
\varepsilon_z = \alpha_{13}\sigma_{xx} + \alpha_{23}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{zz} + \alpha_{34}\sigma_{xy} + \alpha_{35}\sigma_{yz} + \alpha_{36}\sigma_{xz} \\
\varepsilon_{xy} = \alpha_{14}\sigma_{xx} + \alpha_{24}\sigma_{yy} + \alpha_{34}\sigma_{zz} + \alpha_{44}\sigma_{xy} + \alpha_{45}\sigma_{yz} + \alpha_{46}\sigma_{xz} \\
\varepsilon_{yz} = \alpha_{15}\sigma_{xx} + \alpha_{25}\sigma_{yy} + \alpha_{35}\sigma_{zz} + \alpha_{45}\sigma_{xy} + \alpha_{55}\sigma_{yz} + \alpha_{56}\sigma_{xz} \\
\varepsilon_{xz} = \alpha_{16}\sigma_{xx} + \alpha_{26}\sigma_{yy} + \alpha_{36}\sigma_{zz} + \alpha_{46}\sigma_{xy} + \alpha_{56}\sigma_{yz} + \alpha_{66}\sigma_{xz}
\end{cases} \tag{2.2.9}$$

Как видим, в соотношении (2.2.9) присутствует двадцать одна независимая постоянная. На практике как правило рассматривают тела, для каждой точки которых существует одна плоскость упругой симметрии, касательная к координатной поверхности $z = const$. В этом случае количество независимых переменных становится равной тринадцати, и закон Гука для таких тел примет вид:

$$\begin{cases}
\varepsilon_x = \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{zz} + \alpha_{14}\sigma_{xy} \\
\varepsilon_y = \alpha_{12}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{zz} + \alpha_{24}\sigma_{xy} \\
\varepsilon_z = \alpha_{13}\sigma_{xx} + \alpha_{23}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{zz} + \alpha_{34}\sigma_{xy} \\
\varepsilon_{xy} = \alpha_{14}\sigma_{xx} + \alpha_{24}\sigma_{yy} + \alpha_{34}\sigma_{zz} + \alpha_{44}\sigma_{xy} \\
\varepsilon_{yz} = \alpha_{55}\sigma_{yz} + \alpha_{56}\sigma_{xz} \\
\varepsilon_{xz} = \alpha_{56}\sigma_{yz} + \alpha_{66}\sigma_{xz}
\end{cases} \tag{2.2.10}$$

Коэффициенты α_{ij} этой системы определяются из соотношений:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{1}{E_x}, \quad \alpha_{12} = -\frac{\nu_{yx}}{E_x} = -\frac{\nu_{xy}}{E_y}, \quad \alpha_{13} = -\frac{\nu_{xz}}{E_z} = -\frac{\nu_{zx}}{E_x}, \\
\alpha_{14} &= -\frac{\eta_{xy,x}}{E_x} = -\frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{E_y}, \quad \alpha_{23} = -\frac{\nu_{zy}}{E_y} = -\frac{\nu_{yz}}{E_z}, \\
\alpha_{24} &= -\frac{\eta_{xy,y}}{E_y} = -\frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}}, \quad \alpha_{33} = \frac{1}{E_z}, \quad \alpha_{34} = -\frac{\eta_{xy,z}}{E_z} = -\frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}}, \\
\alpha_{44} &= \frac{1}{G_{xy}}, \quad \alpha_{55} = \frac{1}{G_{yz}}, \quad \alpha_{56} = -\frac{\mu_{zx,yz}}{G_{yz}} = -\frac{\mu_{yz,zx}}{G_{xz}}, \quad \alpha_{66} = \frac{1}{G_{xz}}.
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Здесь:

E_x, E_y, E_z – модули упругости по направлениям x, y, z соответственно; G_{yz}, G_{xz}, G_{xy} – модули сдвига для плоскостей, параллельных координатным плоскостям $x = const, y = const, z = const$ соответственно; $\nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}$ – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие при растяжении вдоль осей координат; $\mu_{zx,yz}, \mu_{yz,zx}$ – коэффициенты, которые характеризуют сдвиги в плоскостях, параллельных координатным плоскостям, обусловленные касательными напряжениями, которые действуют в плоскостях, касательных к другим координатным плоскостям; $\eta_{xy,x}, \eta_{xy,y}, \eta_{xy,z}$ – коэффициенты взаимного влияния, которые характеризуют сдвиги в координатных плоскостях, обусловленные нормальными напряжениями; $\eta_{x,xy}, \eta_{y,xy}, \eta_{z,xy}$ – коэффициенты взаимного влияния, которые характеризуют удлинения, обусловленные касательными напряжениями.

2.3 Разрешающая система уравнений статики толстостенных ортотропных прямоугольных пластин

Выберем разрешающие функции u, v, w .

Используя системы (2.2.5), (2.2.1), (2.2.2), можем провести ряд тождественных преобразований:

Из (2.2.2):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z} &= \varepsilon_{zx} - \frac{\partial w}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \alpha_{55} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \alpha_{55} \left[-X - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \right] - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \alpha_{55} \left[-X - \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{11} \varepsilon_x + \lambda_{12} \varepsilon_y + \lambda_{13} \varepsilon_z) - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right] - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \alpha_{55} \left[-X - \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda_{13} \frac{\partial w}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_{66} \varepsilon_{xy}) \right] - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -\alpha_{55} \lambda_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (\alpha_{55} \lambda_{12} + \alpha_{55} \lambda_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - (1 + \alpha_{55} \lambda_{13}) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} - \alpha_{55} \lambda_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha_{55} X
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Аналогично:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\alpha_{44} \lambda_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (\alpha_{44} \lambda_{12} + \alpha_{44} \lambda_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - (1 + \alpha_{44} \lambda_{23}) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} - \alpha_{44} \lambda_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \alpha_{44} Y \tag{2.3.2}$$

Для того, чтобы получать уравнения относительно $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ будем делать следующие преобразования:

Из (2.2.1) имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= 0 \\
\lambda_{55} \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} + \lambda_{44} \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda_{13} \varepsilon_x + \lambda_{23} \varepsilon_y + \lambda_{33} \varepsilon_z) + Z &= 0 \\
\lambda_{55} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) + \lambda_{44} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \lambda_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \lambda_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \lambda_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + Z &= 0 \\
\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \left(-\frac{\lambda_{55} + \lambda_{13}}{\lambda_{33}} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \left(-\frac{\lambda_{44} + \lambda_{23}}{\lambda_{33}} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(-\frac{\lambda_{55}}{\lambda_{33}} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left(-\frac{\lambda_{44}}{\lambda_{33}} \right) - \frac{Z}{\lambda_{33}}
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

После замены в уравнениях (2.3.1) – (2.3.3) элементов матрицы жесткости на элементы матрицы упругой податливости имеем систему трех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, что описывает напряженно-деформированное состояние прямоугольной толстостенной ортотропной пластины:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -\alpha_{55} \frac{\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2}{\Delta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\alpha_{55}}{\alpha_{66}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha_{55} \left(\frac{\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33}}{\Delta} + \frac{1}{\alpha_{66}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \\
&\quad - \left(1 + \alpha_{55} \frac{\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}}{\Delta} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \alpha_{55} X \\
\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -\alpha_{44} \frac{\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}^2}{\Delta} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\alpha_{44}}{\alpha_{66}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \alpha_{44} \left(\frac{\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33}}{\Delta} + \frac{1}{\alpha_{66}} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\
&\quad - \left(1 + \alpha_{44} \frac{\alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}}{\Delta} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \alpha_{44} Y \\
\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \frac{\Delta + \alpha_{55}\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{55}}{\alpha_{55}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\Delta + \alpha_{44}\alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{44}}{\alpha_{44}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} - \\
&\quad - \frac{\Delta}{\alpha_{55}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\Delta}{\alpha_{44}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\Delta \cdot Z}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}
\end{aligned} \right. \quad (2.3.4)$$

Коэффициенты α_j определяются из соотношений (2.2.6).

2.4 Разрешающая система уравнений статики толстостенных анизотропных прямоугольных пластин с одной плоскостью упругой симметрии

Из систем (2.2.10), (2.2.1), (2.2.2) путем элементарных преобразований получаем разрешающую систему трех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, описывающую напряженно-деформированное состояние анизотропной пластины:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} a_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} a_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} a_3 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} a_4 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} a_5 + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} a_6 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} a_7 \\
&\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} a_8 + a_9 X + a_{10} Y \\
\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} b_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} b_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} b_3 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} b_4 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} b_5 + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} b_6 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} b_7 \\
&\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} b_8 + b_9 X + b_{10} Y
\end{aligned} \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + c_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + c_4 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + c_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_7 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c_8 Z$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i в системе (2.4.1) определяются механическими характеристиками материала с учетом соотношений (2.2.11).

На практике формулы для анизотропного тела с одной плоскостью упругой симметрии получаются из формул для ортотропного тела путем поворота системы координат на угол α вокруг оси OZ .

При этом коэффициенты матриц упругой податливости a_{ij} и a'_{ij} в обоих случаях связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \cos^4 \alpha a_{11} + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha a_{12} + \sin^4 \alpha a_{22} + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha a_{66} \\ a'_{22} &= \sin^4 \alpha a_{11} + \cos^4 \alpha a_{22} + a_{66} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2 a_{12} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ a'_{33} &= a_{33} \\ a'_{44} &= a_{44} \cos^2 \alpha + a_{55} \sin^2 \alpha \\ a'_{55} &= a_{44} \sin^2 \alpha + a_{55} \cos^2 \alpha \\ a'_{66} &= (a_{11} + a_{22} - 2a_{12}) 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + a_{66} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 \\ a'_{12} &= (a_{11} + a_{22} - a_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a_{12} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ a'_{13} &= a_{13} \cos^2 \alpha + a_{23} \sin^2 \alpha \\ a'_{14} &= 0 \\ a'_{15} &= 0 \\ a'_{16} &= [2(a_{22} \sin^2 \alpha - a_{11} \cos^2 \alpha) + (a_{66} + 2a_{12})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha \\ a'_{23} &= a_{13} \sin^2 \alpha + a_{23} \cos^2 \alpha \\ a'_{24} &= 0 \\ a'_{25} &= 0 \\ a'_{26} &= [2(a_{22} \cos^2 \alpha - a_{11} \sin^2 \alpha) - (a_{66} + 2a_{12})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha \\ a'_{34} &= 0 \\ a'_{35} &= 0 \\ a'_{36} &= 2(a_{23} - a_{13}) \sin \alpha \cos \alpha \\ a'_{45} &= (a_{44} - a_{55}) \sin \alpha \cos \alpha \\ a'_{46} &= 0 \\ a'_{56} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Система, описывающая граничные условия на нижней и верхней гранях пластины для случаев изотропного, ортотропного и анизотропного тел записывается в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_{33} \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_{zq} \\ \lambda_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \sigma_{xq} \\ \lambda_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \sigma_{yq} \end{array} \right. , \quad q = 0, c \quad (2.4.3)$$

Где коэффициенты β_j можно найти из соотношения:

$$\sigma_{zz} = \beta_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_{33} \frac{\partial w}{\partial z} . \quad (2.4.4)$$

Выводы

В разделе 2 были получены следующие результаты:

1. Используя основные уравнения теории упругости, получены уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние изотропных, ортотропных и анизотропных толстостенных пластин с одной плоскостью упругой симметрии.
2. Из общих уравнений получены системы, каждая из которых является системой трех разрешающих дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, описывающие напряженно-деформированное состояние толстостенных изотропных, ортотропных и анизотропных прямоугольных пластин.
3. Представлена система, описывающая граничные условия на боковых гранях пластины.
4. Таким образом, полностью сформулирована трехмерная краевая задача статики толстостенных прямоугольных пластин для случая изотропного, ортотропного и анизотропного тела.

Раздел 3. Решение трехмерных краевых задач статики прямоугольных ортотропных пластин на основе сплайн-аппроксимации

3.1 Некоторые сведения о применении сплайн-функций

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$. Обозначим через P_m множество полиномов степени не более m , а через $C^{(k)}[a, b]$ – множество k раз непрерывно дифференцированных на $[a, b]$ функций. Функция $S_{m,k}(x)$ называется сплайном степени m дефекта k (k – целое, $1 \leq k \leq m$) с узлами на сетке Δ , если:

$$\begin{aligned} \text{а) } & S_{m,k}(x) \in P_m, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ \text{б) } & S_{m,k}(x) \in C^{(m-k)}[a, b] \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Из определения следует, что сплайн $S_{m,k}(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $m-k$, а $m-k+1$ – ая производная может быть разрывной на $[a, b]$.

Множество сплайнов, которые отвечают определению (3.1) обозначим через $S_{m,k}(\Delta)$. Множество сплайнов степени m дефекта 1 (при $k = 1$) обозначим через $S_m(x)$.

Пусть кроме сетки Δ на отрезке $[a, b]$ задана сетка $\bar{\Delta}: a = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_N = b$.

Сплайн $S_m(x)$ называется интерполяционным полиномиальным сплайном на сетке $\bar{\Delta}$, который интерполирует функцию $f(x)$, если:

$$\begin{aligned} \text{а) } & S_m(x) \in P_m, \quad x \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ \text{б) } & S_m(x) \in C^{(m-1)}[a, b] \\ \text{в) } & S_m(\bar{x}_i) = y_i = f(\bar{x}_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

При этом узлы сетки Δ называются узлами сплайна, а узлы сетки $\bar{\Delta}$ – узлами интерполяции. Для сплайнов нечетной степени будем считать, что сетки Δ и $\bar{\Delta}$ совпадают.

Сплайн $S_m(x)$ из множества $S_m(\Delta)$ склеен в $N - 1$ узлах до $m - 1$ производной включительно N алгебраических полиномов степени m , поэтому у него есть $N(m + 1) - (N - 1)m = N + m$ свободных параметров. Поэтому множество всех сплайнов $S(x)$ m -ой степени есть линейное конечномерное пространство размерности $N+m$.

В зависимости от выбора базисных функций возможно получить разное аналитическое отображение сплайнов.

Наиболее распространенным базисом в этом пространстве являются B -сплайны m -го степеня $B_m^{(i)}(x)$ ($i = -m, \dots, N-1$), тоесть любой сплайн $S(x)$ m -го степеня можно представить единственным образом в виде:

$$S_m(x) = \sum_{i=-m}^{N-1} b_i B_m^i(x), \quad (3.1.3)$$

где b_i – постоянные, i – номер сплайна(сплайны нумеруются по левому узлу их носителей). B -сплайны нулевой степеня на сетке Δ определяются таким образом:

$$B_0^i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}); \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (i = \overline{0, N-1}). \quad (3.1.4)$$

Для построения B -сплайнов степеня m ($m \geq 1$) используем расширенную сетку Δ' . В частности, можно рассматривать сетку:

$$\Delta': x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} < \dots < x_{N+m}. \quad (3.1.5)$$

где $x_{k+1} - x_k = h = const$.

B -сплайны степеня m на сетке Δ' можно определить из рекуррентного соотношения:

$$B_m^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} B_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} B_{m-1}^{i+1}(x) \quad (3.1.6)$$

($i = \overline{0, N-1}$).

Из всех сплайнов, которые не равняются нулю на интервале $[x_i, x_{i+1})$ ($i = \overline{0, N-1}$) можно составить таблицу:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & B_0^i & \\ & & & & B_1^{-1} & B_1^i \\ & & & & B_2^{i-2} & B_2^{i-1} & B_2^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ B_m^{i-m} & \dots & B_m^{i-2} & B_m^{i-1} & B_m^i & \overline{B_m^i} & \end{array} \quad (3.1.7)$$

Сплайны $B_m^i(x)$ ($i = \overline{0, N-1}$) имеют такие свойства:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} B_m^i(x) > 0 & x \in [x_i, x_{i+m+1}]; \\ B_m^i(x) \equiv 0 & x \notin [x_i, x_{i+m+1}]; \end{cases} \\
 б) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} B_m^i(x) dx = 1
 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Для построения необходимых нам B -сплайнов перейдем к нумерации их по среднему узлу носителей, при этом нумерация сдвигается на $(m+1)/2$ единиц вправо.

При решении задачи про изгиб толстостенных прямоугольных пластин будем использовать B -сплайны третьей степени, которые при $x_{k+1} - x_k = h = \text{const}$ ($k = \overline{0, N-1}$) имеют вид:

$$B_3^i(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0 & x < x_{i-2} \\ t^3 & x_{i-2} \leq x \leq x_{i-1} \\ -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1 & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ 3t^3 - 6t^2 + 4 & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ (1-t)^3 & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+2} \\ 0 & x_{i+2} < x \end{cases} \tag{3.1.9}$$

где $t = (x - x_k)/h$ на интервале $[x_k, x_{k+1}]$, ($k = \overline{i-2, i+1}$), ($i = \overline{-1, N+1}$). Тогда сплайны третьей степени, что определяются выражением (3.9) можно записать как

$$S_3(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_i B_3^i(x). \tag{3.1.10}$$

Каждый сплайн $B_3^i(x)$ на своих интервалах-носителях имеет вид, представленный на рисунках:

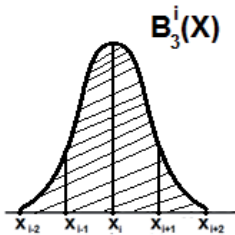


Рис. 1.

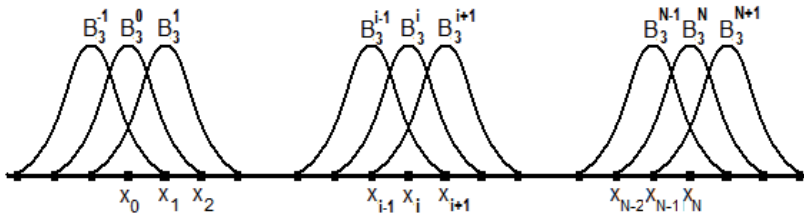


Рис. 2.

При решении задач математической физики, в частности теории пластин и оболочек, во многих случаях возникает необходимость построения сплайна, что удовлетворяет наперед заданным граничным условиям на концах интервала $[x_0, x_N]$. Такие сплайны в виде линейной комбинации B -сплайнов можно построить для некоторых вариантов граничных условий. В частности для сплайнов третьей степени можно преподнести в виде:

$$S_3(x) = \sum_{j=0}^N \beta_j \psi_j(x) \quad N \geq 4 \quad (3.1.11)$$

где β_j – некоторые постоянные коэффициенты, ψ_j – линейные комбинации B -сплайнов третьей степени.

3.2 Сведение трехмерной краевой задачи к одномерной при помощи сплайн-аппроксимации

Во втором разделе было показано, что напряженно-деформированное состояние анизотропных толстостенных прямоугольных оболочек в пространственной постановке описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами (2.4.1) с граничными условиями на верхней и нижней гранях.

В этом подразделе будет описан подход к решению данной трехмерной краевой задачи, основанный на ее сведении к одномерной при помощи сплайн-аппроксимации в двух координатных направлениях.

Решение системы (2.4.1) будем искать в виде (3.2.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y, z) = \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N u_{ij}(z) \phi_i^u(x) \psi_j^u(y) \\ v(x, y, z) = \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N v_{ij}(z) \phi_i^v(x) \psi_j^v(y) \\ w(x, y, z) = \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N w_{ij}(z) \phi_i^w(x) \psi_j^w(y) \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

где функции $u_{ij}(z), v_{ij}(z), w_{ij}(z)$ подлежат определению, а функции ϕ_i^a, ψ_j^a , $a = u, v, w$ определяются через линейные комбинации B_3 сплайнов на равномерных сетках $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = a$ и $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = b$ соответственно с учетом граничных условий при $x=0, x=a, y=0, y=b$. Это позволяет использовать метод сплайн-коллокации по координатам x и y и свести начальную задачу к системе $6(N+1)(M+1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с матрицами граничных условий на гранях $z=0, z=c$, представленными в виде (2.4.3). Полученная одномерная краевая задача в дальнейшем решается методом дискретной ортогонализации Годунова.

Функции $\phi_i^a(x), \psi_j^a(y)$ представляются в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0^a = \alpha_{11}^{a\phi} B_3^{-1} + \alpha_{12}^{a\phi} B_3^0 + \alpha_{13}^{a\phi} B_3^1 \\ \phi_1^a = \alpha_{21}^{a\phi} B_3^{-1} + \alpha_{22}^{a\phi} B_3^0 + \alpha_{23}^{a\phi} B_3^1 \\ \phi_i^a = B_3^i, \quad i = 2..N-2 \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{N-1}^a = \beta_{21}^{a\phi} B_3^{N-1} + \beta_{22}^{a\phi} B_3^N + \beta_{23}^{a\phi} B_3^{N+1} \\ \phi_N^a = \beta_{11}^{a\phi} B_3^{N-1} + \beta_{12}^{a\phi} B_3^N + \beta_{13}^{a\phi} B_3^{N+1} \end{array} \right. \quad a = u, v, w$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0^a = \alpha_{11}^{a\psi} B_3^{-1} + \alpha_{12}^{a\psi} B_3^0 + \alpha_{13}^{a\psi} B_3^1 \\ \psi_1^a = \alpha_{21}^{a\psi} B_3^{-1} + \alpha_{22}^{a\psi} B_3^0 + \alpha_{23}^{a\psi} B_3^1 \\ \psi_i^a = B_3^i, \quad i = 2..M-2 \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{M-1}^a = \beta_{21}^{a\psi} B_3^{M-1} + \beta_{22}^{a\psi} B_3^M + \beta_{23}^{a\psi} B_3^{M+1} \\ \psi_M^a = \beta_{11}^{a\psi} B_3^{M-1} + \beta_{12}^{a\psi} B_3^M + \beta_{13}^{a\psi} B_3^{M+1} \end{array} \right. \quad a = u, v, w$$

B сплайны третьей степени выбираются из оглядки на то, что исходная система является системой дифференциальных уравнений второго рода. Параметры $\alpha_{ij}^{a\phi}, \alpha_{ij}^{a\psi}, \beta_{ij}^{a\phi}, \beta_{ij}^{a\psi}$, $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ определяются в зависимости от типа граничных условий на гранях $x=0, x=a, y=0, y=b$.

Подставим представления искомым функций вида (3.2.1) в систему (2.4.1). При этом требуем удовлетворения уравнений системы в заданных точках коллокации (ξ_k, η_p) : $\xi_k, k = 0..N, \eta_p, p = 0..M$. Для обеспечения наилучшей аппроксимации следует рассматривать сетку с четным количеством узлов по каждому из направлений: $N = 2n + 1, M = 2m + 1$. На промежутках $[x_{2i}, x_{2i+1}], [y_{2j}, y_{2j+1}]$ берется по 2 узла коллокации, а на промежутках $[x_{2i+1}, x_{2i+2}], [y_{2j+1}, y_{2j+2}]$ точки коллокации отсутствуют:

$\xi_{2i} \in [x_{2i}, x_{2i+1}], \xi_{2i+1} \in [x_{2i}, x_{2i+1}], \eta_{2j} \in [y_{2j}, y_{2j+1}], \eta_{2j+1} \in [y_{2j}, y_{2j+1}]$. Всередине промежутков узлы задаются по правилу:

$\xi_{2i} = x_{2i} + s_1 h_x, \xi_{2i+1} = x_{2i} + s_2 h_x, \eta_{2j} = y_{2j} + s_1 h_y, \eta_{2j+1} = y_{2j} + s_2 h_y, i = 0..n, j = 0..m$, где s_1, s_2 – корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0,1]$, $s_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, s_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$. Такой выбор узлов коллокации является оптимальным и обеспечивает точность аппроксимации по каждому направлению равной $O(h_x^3), O(h_y^3)$ соответственно.

После подстановки получим:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N \frac{\partial^2 u_{ij}(z)}{\partial z^2} \phi_i^u(\xi_k) \psi_j^u(\eta_p) &= a_1 \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N u_{ij}(z) \frac{\partial^2 \phi_i^u(\xi_k)}{\partial x^2} \psi_j^u(\eta_p) + \\
&+ b_1 \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N u_{ij}(z) \phi_i^u(\xi_k) \frac{\partial^2 \psi_j^u(\eta_p)}{\partial y^2} + \\
&+ c_1 \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N v_{ij}(z) \frac{\partial \phi_i^u(\xi_k)}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^u(\eta_p)}{\partial y} + \\
&+ d_1 \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N \frac{\partial w_{ij}(z)}{\partial z} \frac{\partial \phi_i^w(\xi_k)}{\partial x} \psi_j^w(\eta_p) + X_\alpha \\
\sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N \frac{\partial^2 v_{ij}(z)}{\partial z^2} \phi_i^v(\xi_k) \psi_j^v(\eta_p) &= a_2 \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N v_{ij}(z) \frac{\partial^2 \phi_i^v(\xi_k)}{\partial x^2} \psi_j^v(\eta_p) + \\
&b_2 \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N v_{ij}(z) \phi_i^v(\xi_k) \frac{\partial^2 \psi_j^v(\eta_p)}{\partial y^2} + \\
&c_2 \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N u_{ij}(z) \frac{\partial \phi_i^v(\xi_k)}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^v(\eta_p)}{\partial y} + \\
&d_2 \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N \frac{\partial w_{ij}(z)}{\partial z} \phi_i^w(\xi_k) \frac{\partial \psi_j^w(\eta_p)}{\partial y} + Y_\alpha \\
\sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N \frac{\partial^2 w_{ij}(z)}{\partial z^2} \phi_i^w(\xi_k) \psi_j^w(\eta_p) &= a_3 \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N \frac{\partial u_{ij}(z)}{\partial z} \frac{\partial \phi_i^u(\xi_k)}{\partial x} \psi_j^u(\eta_p) + \\
&+ b_3 \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N \frac{\partial v_{ij}(z)}{\partial z} \phi_i^v(\xi_k) \frac{\partial \psi_j^v(\eta_p)}{\partial y} + \\
&+ c_3 \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N w_{ij}(z) \frac{\partial^2 \phi_i^w(\xi_k)}{\partial x^2} \psi_j^w(\eta_p) + \\
&+ d_3 \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N w_{ij}(z) \phi_i^w(\xi_k) \frac{\partial^2 \psi_j^w(\eta_p)}{\partial y^2} + Z_\lambda
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

где:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\alpha_{55} \frac{\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2}{\Delta}; & b_1 &= -\frac{\alpha_{55}}{\alpha_{66}}; \\
c_1 &= -\alpha_{55} \left(\frac{\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33}}{\Delta} + \frac{1}{\alpha_{66}} \right); & d_1 &= -(1 + \alpha_{55} \frac{\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}}{\Delta}); \\
a_2 &= -\alpha_{44} \frac{\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}^2}{\Delta}; & b_2 &= -\frac{\alpha_{44}}{\alpha_{66}}; \\
c_2 &= -\alpha_{44} \left(\frac{\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33}}{\Delta} + \frac{1}{\alpha_{66}} \right); & d_2 &= -(1 + \alpha_{44} \frac{\alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}}{\Delta}); \\
a_3 &= -\frac{\Delta + \alpha_{55}\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{55}}{\alpha_{55}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}; & b_3 &= -\frac{\Delta + \alpha_{44}\alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{44}}{\alpha_{44}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}; \\
c_3 &= -\frac{\Delta}{\alpha_{55}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)}; & d_3 &= -\frac{\Delta}{\alpha_{44}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)};
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

$$X_\alpha = -\alpha_{55}X; \quad Y_\alpha = -\alpha_{44}Y; \quad Z_\lambda = -\frac{\Delta \cdot Z}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2};$$

Перепишем систему (3.2.4) в матрично-векторной форме:

$$\left\{ \begin{aligned}
A_1^u \frac{\partial \overline{S}_2^u}{\partial z} &= a_1 A_2^u \overline{S}_1^u + b_1 A_3^u \overline{S}_1^u + c_1 A_4^u \overline{S}_1^u + d_1 A_5^u \overline{S}_1^u + X_\alpha \\
&\frac{\partial \overline{S}_1^u}{\partial z} = \overline{S}_2^u \\
A_1^v \frac{\partial \overline{S}_2^v}{\partial z} &= a_2 A_2^v \overline{S}_1^v + b_2 A_3^v \overline{S}_1^v + c_2 A_4^v \overline{S}_1^v + d_2 A_5^v \overline{S}_1^v + Y_\alpha \\
&\frac{\partial \overline{S}_1^v}{\partial z} = \overline{S}_2^v \\
A_1^w \frac{\partial \overline{S}_2^w}{\partial z} &= a_3 A_2^w \overline{S}_1^w + b_3 A_3^w \overline{S}_1^w + c_3 A_4^w \overline{S}_1^w + d_3 A_5^w \overline{S}_1^w + Z_\lambda \\
&\frac{\partial \overline{S}_1^w}{\partial z} = \overline{S}_2^w
\end{aligned} \right. \tag{3.2.6}$$

где:

$$\overline{X}_\alpha = (X_\alpha \dots X_\alpha)^T; \quad \overline{Y}_\alpha = (Y_\alpha \dots Y_\alpha)^T; \quad \overline{Z}_\lambda = (Z_\lambda \dots Z_\lambda)^T;$$

$$\dim \overline{X}_\alpha = (N+1)(M+1), \quad \dim \overline{Y}_\alpha = (N+1)(M+1), \quad \dim \overline{Z}_\lambda = (N+1)(M+1).$$

$$\text{Обозначим: } \overline{S} = \begin{pmatrix} \overline{S}_1^u \\ \overline{S}_2^u \\ \overline{S}_1^v \\ \overline{S}_2^v \\ \overline{S}_1^w \\ \overline{S}_2^w \end{pmatrix} \tag{3.2.7}$$

$$\dim \vec{S} = 6(N+1)(M+1) \times 1.$$

Тогда система (3.2.6) переписывается в векторно-матричном виде:

$$\frac{d\vec{S}}{dz} = A \cdot \vec{S} + \vec{f} \quad (3.2.8)$$

Где:

$$A = \begin{pmatrix} \text{O} & E & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\ A_2^1 & \text{O} & A_2^3 & \text{O} & \text{O} & A_2^6 \\ \text{O} & \text{O} & \text{O} & E & \text{O} & \text{O} \\ A_4^1 & \text{O} & A_4^3 & \text{O} & \text{O} & A_4^6 \\ \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & \text{O} & E \\ \text{O} & A_6^2 & \text{O} & A_6^4 & A_6^5 & \text{O} \end{pmatrix} \quad (3.2.9)$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \text{O} \\ \vec{X}_\alpha \\ \text{O} \\ \vec{Y}_\alpha \\ \text{O} \\ \vec{Z}_\lambda \end{pmatrix} \quad (3.2.10)$$

$$\dim A = 6(N+1)(M+1) \times 6(N+1)(M+1);$$

$$\dim \vec{f} = 6(N+1)(M+1) \times 1;$$

$$\text{O} - \text{ноль-матрица}, \quad \dim \text{O} = (N+1)(M+1) \times (N+1)(M+1);$$

$$E - \text{единичная матрица}, \quad \dim E = (N+1)(M+1) \times (N+1)(M+1);$$

$$\dim A_i^j = (N+1)(M+1) \times (N+1)(M+1), \quad i = 2, 4, 6, \quad j = \overline{1..6}$$

$$\begin{aligned} A_2^1 &= (A_1^u)^{-1} \cdot (a_1 \cdot A_2^u + b_1 \cdot A_3^u) \\ A_2^3 &= (A_1^u)^{-1} \cdot (c_1 \cdot A_4^u) \\ A_2^6 &= (A_1^u)^{-1} \cdot (d_1 \cdot A_5^u) \\ A_4^1 &= (A_1^v)^{-1} \cdot (c_2 \cdot A_4^v) \\ A_4^3 &= (A_1^v)^{-1} \cdot (a_2 \cdot A_2^v + b_2 \cdot A_3^v) \\ A_4^6 &= (A_1^v)^{-1} \cdot (d_2 \cdot A_5^v) \\ A_6^2 &= (A_1^w)^{-1} \cdot (a_3 \cdot A_2^w) \\ A_6^4 &= (A_1^w)^{-1} \cdot (b_3 \cdot A_3^w) \\ A_6^5 &= (A_1^w)^{-1} \cdot (c_3 \cdot A_4^w + d_3 \cdot A_5^w) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Таким образом, методом сплайн-коллокации по координатам x и y начальная задача, описанная системой (2.4.1), с соответственными граничными условиями на гранях, сводится к системе $6(N+1)(M+1)$ обычных дифференциальных

уравнений первого рода вида (3.2.8) с матрицами граничных условий на гранях $z = 0$, $z = c$, представленными в виде:

$$\text{Обозначим: } \overline{S(q)} = \begin{pmatrix} \overline{S_1^u(q)} \\ \overline{S_2^u(q)} \\ \overline{S_1^v(q)} \\ \overline{S_2^v(q)} \\ \overline{S_1^w(q)} \\ \overline{S_2^w(q)} \end{pmatrix}, \quad q = 0, c. \quad (3.2.12)$$

$$B_q \cdot \overline{S(q)} = \overline{f_q}, \quad q = 0, c \quad (3.2.13)$$

Тут:

$$\dim \overline{S(q)} = 6(N+1)(M+1)$$

$$\dim B_q = 3(N+1)(M+1) \times 6(N+1)(M+1)$$

$$\dim \overline{f_q} = 3(N+1)(M+1)$$

В обозначениях (3.2.7), (3.2.11), (3.2.12) матрицы A_i^j и векторы $S_i^k(q)$ определяются исходя из соотношений (3.4.4), (3.4.9).

Эта задача решается методом дискретной ортогонализации Годунова.

3.3 Решение одномерных краевых задач методом дискретной ортогонализации

Ряд задач теории пластин, оболочек и теории упругости можно описать непосредственно при помощи обычных дифференциальных уравнений или свести к ним путем распределения переменных. К первой группе можно отнести, в частности, задачи про изгиб круглых пластин при осесимметричных направлениях, про осесимметрическую деформацию цилиндрических оболочек и вообще оболочек обращения, ко второй – задачи про изгиб прямоугольных пластин при шарнирном опирании противоположных граней, задачи статики оболочек обращения при неосесимметричных нагрузках и другое. Основные уравнения, которые описывают указанные группы задач, можно свести к системе обычных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши в виде:

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = A(t)\overline{y} + \overline{f}(t), \quad a \leq t \leq b \quad (3.3.1)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} B_1 \bar{y}(a) &= \bar{b}_1, \\ B_2 \bar{y}(b) &= \bar{b}_2 \end{aligned} \quad (3.3.2), (3.3.3)$$

где $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ - вектор-столбец; \bar{f} - вектор-столбец правой части, $A(t)$ - квадратная матрица порядка n ; B_1, B_2 - заданные прямоугольные матрицы соответственно порядков $k \times n$ и $(n - k) \times n$ ($k < n$); \bar{b}_1, \bar{b}_2 - заданные векторы.

Допустим, что в ряде точек могут быть заданы дополнительные условия, которые накладываются на искомую функцию $\bar{y}(t)$:

$$\bar{y}^+(t_i) = P_i \bar{y}^-(t_i) + \bar{g}_i \quad (3.3.4)$$

где P_i - неособенная квадратная матрица порядка n ; \bar{g}_i - n -мерный вектор. Таким образом, по сути, рассматривается более общая краевая задача для системы уравнений (3.4.1). Граничную задачу (3.4.2) – (3.4.3) можно было бы решить просто путем сведения к ряду задач Коши, решения которых находится любым численным методом, например, методом Рунге - Кутты. В связи с тем, что при численном решении граничных задач теории оболочек имеют место граничные и локальные эффекты, которые вызывают быстрый рост искомых функций, метод сведения граничных задач к задаче Коши может привести к нестойкости вычислений. С математической точки зрения это означает: если собственные значения матрицы системы существенно отличаются по величине действительной части, то при интегрировании с возрастанием аргумента за счет потери значимых цифр система векторов-решений задач Коши становится практически линейно зависимой и поэтому не можно с достаточной точностью при удовлетворении граничных условий на втором конце интервала определить постоянные интегрирования и сами искомые функции. Может случиться, что в решении не останется ни одного правильного знака. Чтобы избежать указанных трудностей, разработано ряд методов, при помощи которых численное решение граничных задач сводится к устойчивому вычислительному процессу. Одним из таких методов, что хорошо зарекомендовал себя в практике решения задач теории оболочек, есть метод дискретной ортогонализации Годунова. Эксперименты

показали эффективность, высокую точность, а также его простоту и удобство при численном решении рассматриваемого класса задач на ПК. Рассмотрим суть метода. Решение граничной задачи (3.3.1) - (3.3.3) будем искать в виде:

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=1}^m C_i \bar{y}_i(t) + \overline{y_{m+1}}(t) \quad (3.3.5)$$

где $m = \min(k, n-k)$ (для определенности положим $m = n-k$). \bar{y}_i – решения задач Коши для системы уравнений (3.3.1) при $\bar{f} = 0$ с начальными условиями, что удовлетворяют граничные условия на левом конце интервала (3.3.2), (3.3.3) при $b_1 = 0$; $\overline{y_{m+1}}(t)$ – решение задачи Коши для системы (3.3.1) с начальными условиями, что удовлетворяют граничные условия (3.3.2), (3.3.3); m равняется числу граничных условий на правом конце интервала интегрирования. Обусловленные требования можно выполнить. Граничные условия (3.3.2) в точке $t = a$ подадим в развернутом виде:

$$\begin{aligned} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1k}y_k + b_{1k+1}y_{k+1} + \dots + b_{1n}y_n &= b_1 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2k}y_k + b_{2k+1}y_{k+1} + \dots + b_{2n}y_n &= b_2 \\ &\dots \\ b_{k1}y_1 + b_{k2}y_2 + \dots + b_{kk}y_k + b_{kk+1}y_{k+1} + \dots + b_{kn}y_n &= b_k \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Принимая, что коэффициенты первых k столбцов в равенствах (3.3.6) образуют неособенную матрицу, перенесем другие столбцы в правую часть. Тогда условия (3.3.6) запишем в виде

$$\begin{aligned} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1k}y_k &= b_1 - b_{1k+1}y_{k+1} - \dots - b_{1n}y_n \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2k}y_k &= b_2 - b_{2k+1}y_{k+1} - \dots - b_{2n}y_n \\ &\dots \\ b_{k1}y_1 + b_{k2}y_2 + \dots + b_{kk}y_k &= b_k - b_{kk+1}y_{k+1} - \dots - b_{kn}y_n \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Присваивая компонентам $y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n$ последовательно значения столбцов единичной матрицы и положив при этом $b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$, определим начальные условия для $\bar{y}_j, j = 1..m$; при $y_{k+1} = y_{k+2} = \dots = y_n = 0$ находим начальные условия для $\overline{y_{m+1}}$. Метод дискретной ортогонализации даёт возможность получить устойчивый вычислительный процесс за счет ортогонализации векторов-решений задач Коши в конечном числе точек интервала изменения аргумента. Разобьем весь интервал $[a, b]$ на малые отрезки точками интегрирования $t_s, (s = 0..N)$ так, что $t_0 = a, t_N = b$.

Среди этих точек выберем точки ортогонализации $T_i (i = \overline{0, M})$. Это обычно зависит от степени необходимой точности решения задачи и не зависит от других условий. Пусть в точке T_i любым численным методом, например Рунге-Кутта, найдены решения задач Коши, которые обозначим через $\bar{u}_r(T_i), (r = \overline{1, m+1})$.

Допуская, что в точке T_i заданы условия (3.3.7), рассмотрим векторы $\bar{u}_r^+(T_i)$:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r^+(T_i) &= P_i \bar{u}_r^-(T_i), r = \overline{1, m} \\ \bar{u}_{m+1}^+(T_i) &= P_i \bar{u}_{m+1}^-(T_i) + g_i \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

где $\bar{u}_1^-, \bar{u}_2^-, \dots, \bar{u}_m^-$ – решения однородных задач, \bar{u}_{m+1}^- – решение неоднородной задачи Коши.

Таким образом, в точке T_i до ортогонализации имеем векторы:

$$\bar{u}_1^+(T_i), \bar{u}_2^+(T_i), \dots, \bar{u}_m^+(T_i), \bar{u}_{m+1}^+(T_i) \quad (3.3.9)$$

Проортонормируем векторы $\bar{u}_j^+(T_i) (j = 1, 2, \dots, m)$ в точке T_i и обозначим их через

$$\bar{z}_1(T_i), \bar{z}_2(T_i), \dots, \bar{z}_m(T_i) \quad (3.3.10)$$

Векторы $\bar{z}_i(T_i)$ выражаются через векторы $\bar{u}_i^+(T_i)$ таким образом:

$$\bar{z}_r = \frac{1}{\omega_{rr}} (\bar{u}_r^+ - \sum_{j=1}^{r-1} \omega_{rj} \bar{z}_j), r = \overline{1, m} \quad (3.3.11)$$

где

$$\omega_{rj} = \left(\bar{u}_r^+, \bar{z}_j \right), j < r$$

$$\omega_{rr} = \sqrt{(\bar{u}_r^+, \bar{u}_r^+) - \sum_{j=1}^{r-1} \omega_{rj}^2}.$$

Вектор \bar{z}_{m+1} не нормируется и вычисляется по формуле:

$$\bar{z}_{m+1} = \bar{u}_{m+1}^+ - \sum_{i=1}^m \omega_{m+1,i} \bar{z}_i, \omega_{m+1,i} = \left(\bar{u}_{m+1}^+, \bar{z}_i \right) \quad (3.3.12)$$

При $t = T_i$ получаем:

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_{11} z_1 &= \overline{u}_1^+; \\
\overline{\omega}_{22} z_2 &= \overline{u}_2^+ - \overline{\omega}_{21} z_1; \\
\overline{\omega}_{33} z_3 &= \overline{u}_3^+ - \overline{\omega}_{32} z_2 - \overline{\omega}_{31} z_1; \\
&\dots
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_{mm} z_m &= \overline{u}_m^+ - \overline{\omega}_{m1} z_1 - \overline{\omega}_{m2} z_2 - \dots - \overline{\omega}_{m,m-1} z_{m-1}; \\
\overline{z}_{m+1} &= \overline{u}_{m+1}^+ - \overline{\omega}_{m+1,1} z_1 - \overline{\omega}_{m+1,2} z_2 - \dots - \overline{\omega}_{m+1,m-1} z_{m-1} - \overline{\omega}_{m+1,m} z_m;
\end{aligned}$$

После преобразований получим матричное равенство:

$$\begin{bmatrix} \overline{u}_1^+(T_i) \\ \overline{u}_2^+(T_i) \\ \overline{u}_3^+(T_i) \\ \dots \\ \overline{u}_m^+(T_i) \\ \overline{u}_{m+1}^+(T_i) \end{bmatrix} = \Omega_i \begin{bmatrix} \overline{z}_1(T_i) \\ \overline{z}_2(T_i) \\ \overline{z}_3(T_i) \\ \dots \\ \overline{z}_m(T_i) \\ \overline{z}_{m+1}(T_i) \end{bmatrix} \tag{3.3.14}$$

где

$$\Omega_i = \Omega(T_i) = \begin{bmatrix} \omega_{11}(T_i) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{21}(T_i) & \omega_{22}(T_i) & & & 0 \\ \omega_{31}(T_i) & \omega_{32}(T_i) & \omega_{33}(T_i) & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{m1}(T_i) & \omega_{m2}(T_i) & \omega_{m3}(T_i) & \dots & 0 \\ \omega_{m+11}(T_i) & \omega_{m+12}(T_i) & \omega_{m+13}(T_i) & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3.15}$$

Векторы $\overline{z}(T_i)$ есть начальными значениями задач Коши для однородной ($r = \overline{1, m}$) и неоднородной ($r = m+1$) систем дифференциальных уравнений в интервале $T_i \leq t \leq T_{i+1}$

В каждой точке ортогонализации T_i решение системы уравнений, что удовлетворяет граничным условиям на левом конце интервала (3.3.2) – (3.3.3), можно записать в виде двух выражений:

до ортогонализации:

$$\overline{y}(T_i) = \sum_{j=1}^m C_j^{(i-1)} \overline{u}_j^+(T_i) + \overline{u}_{m+1}^+(T_i) \tag{3.3.16}$$

после ортогонализации:

$$\overline{y}(T_i) = \sum_{j=1}^m C_j^{(i-1)} \overline{z}_j(T_i) + \overline{z}_{m+1}(T_i) \tag{3.3.17}$$

Решение системы уравнений (3.3.5) на отрезке $T_i \leq t \leq T_{i+1}$ можно представить в виде:

$$\bar{y}(t) = \sum_{j=1}^m C_j^{(i)} \bar{z}_j(t) + \bar{z}_{m+1}(t) \quad (3.3.18)$$

После интегрирования на последнем промежутке $T_{m-1} \leq t \leq T_m$ и ортогонализации в точке T_M имеем:

$$\bar{y}(T_M) = \sum_{j=1}^m C_j^{(M)} \bar{z}_j(T_M) + \bar{z}_{m+1}(T_M) \quad (3.3.19)$$

Удовлетворяя граничные условия на правом конце интервала интегрирования, то есть подставляя (3.3.19) в (3.3.3), получаем систему m линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $C_j^{(M)}$. После нахождения $C_j^{(M)}$, решение граничной задачи (3.3.1) – (3.3.3) в точке $t = T_M$ дается формулой (64). На этом заканчивается прямой ход решения задачи.

При обратном ходе по значениям постоянных $C_j^{(i)}, j = \overline{1, m}$ определяются постоянные $C_j^{(i-1)}$, начиная с $i = M$. Для этого приравняем правые части выражений (3.3.16) и (3.3.17):

$$\sum_{j=1}^m C_j^{(i-1)} \bar{u}_j^+(T_i) + \bar{u}_{m+1}^+(T_i) = \sum_{j=1}^m C_j^{(i)} \bar{z}_j(T_i) + \bar{z}_{m+1}(T_i) \quad (3.3.20)$$

Подставляя вместо \bar{u}_i^+ ихние значения из (3.3.14), при $t = T_i$ имеем:

$$C_1^{(i-1)} \omega_{11} \bar{z}_1 + C_2^{(i-1)} (\omega_{21} \bar{z}_1 + \omega_{22} \bar{z}_2) + \dots + C_m^{(i-1)} (\omega_{m1} \bar{z}_1 + \omega_{m2} \bar{z}_2 + \dots + \omega_{mm} \bar{z}_m) + 1 \cdot (\omega_{m+11} \bar{z}_1 + \dots + 1 \bar{z}_{m+1}) = C_1^{(i)} \bar{z}_1 + \dots + C_m^{(i)} \bar{z}_m + 1 \cdot \bar{z}_{m+1} \quad (3.3.21)$$

Приравнявая коэффициенты при векторах $\bar{z}_i, i = \overline{1, m+1}$ в (3.3.21), находим:

$$\Omega_i^T \bar{C}^{(i-1)} = \bar{C}^{(i)}, i = \overline{1, M} \quad (3.3.22)$$

или

$$\bar{C}^{(i-1)} = (\Omega_i^T)^{-1} \bar{C}^{(i)}$$

где Ω_i^T - транспонированная матрица (3.3.15); $C^{(i)}$ – вектор-столбец с компонентами $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}, \dots, C_m^{(i)}, 1$

Таким образом, при помощи равенства (3.3.22) можно найти значения постоянных $C_j^{(i)}$ во всех точках, начиная с $i = M$. По формуле (3.3.18)

вычисляются решения \bar{y} граничной задачи. При реализации данного алгоритма на ПК необходимо сохранять информацию про матрицы Ω_i и векторы $\bar{z}_r, r = \overline{1, m+1}$. На практике полученная информация во всех точках ортогонализации как правило не используется, а при решении задач ограничиваются только значениями искомых функций в последовательности точек - так называемых точек выдачи результатов, которых часто значительно меньше, чем точек ортогонализации. Используя такой подход, можно существенно сократить объем информации, которая сохраняется.

Пусть T_{i-p} и T_i – точки выдачи результатов. Из равенства (3.3.22) можно получить, что:

$$\Omega_i^T \Omega_{i-1}^T \dots \Omega_{i-(p-1)}^T \bar{C}^{(i-p)} = \bar{C}^{(i)} \quad (3.3.23)$$

или

$$\left(\prod_{j=0}^{p-1} \Omega_{i-j}^T \right) \bar{C}^{(i-p)} = \bar{C}^{(i)} \quad (3.3.24)$$

Откуда:

$$\bar{C}^{(i-p)} = \left(\prod_{j=0}^{p-1} \Omega_{i-j}^T \right)^{-1} \bar{C}^{(i)} \quad (3.3.25)$$

Таким образом, для нахождения вектора $\bar{C}^{(i-p)}$ необходимо сохранять информацию про произведение матриц $\prod_{j=0}^{p-1} \Omega_{i-j}^T$, что дает значительную экономию памяти ПК. В случае, когда в точке выдачи результатов T_i на такое решение наложены дополнительные условия (3.3.4), выражение (3.3.18) определяет граничные условия $\bar{y}^+(T_i)$ справа. Граничные значения слева $\bar{y}^-(T_i)$ находят путем подстановки в выражение (3.3.5) значений

$$\bar{y}_j^+(T_i) = P_i \bar{y}_i(T_i); \bar{y}_{m+1}^+(T_i) = P_i \bar{y}_{m+1}(T_i) + g_i, j = \overline{1, m}$$

Получаем:

$$\bar{y}^+(T_i) = \sum_{j=1}^m C_j(T_i) P_i \bar{y}_j^-(T_i) + P_i \bar{y}_{m+1}^-(T_i) + g_i = P_i \left(\sum_{j=1}^m C_j(T_i) \bar{y}_j^-(T_i) + \bar{y}_{m+1}^-(T_i) \right) + g_i \quad (3.3.26)$$

Откуда:

$$\sum_{j=1}^m C_j(T_i) \bar{y}_j^-(T_i) + \bar{y}_{m+1}^-(T_i) = P^{-1} \left(\bar{y}^+(T_i) - \bar{g}_i \right) \quad (3.3.27)$$

3.4 Постановка граничных условий

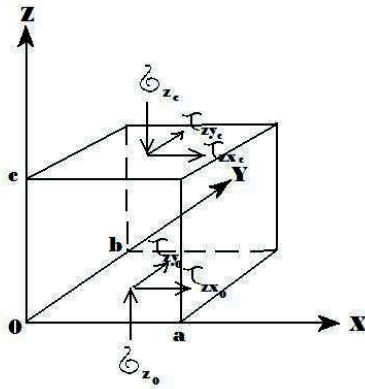


Рис. 3.

Пусть на гранях $z=0, z=c$ заданы нормальные и касательные напряжения $\sigma_{z_0}, \sigma_{z_c}, \tau_{zx_0}, \tau_{zy_0}, \tau_{zx_c}, \tau_{zy_c}$, которые в дальнейшем будут определять распределение напряжений, деформаций и перемещений в середине толстостенной пластины.

Из систем уравнений (2.2.2), (2.2.10) можем выразить:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \alpha_{11} \sigma_{xx} + \alpha_{12} \sigma_{yy} + \alpha_{13} \sigma_{zz} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = \alpha_{12} \sigma_{xx} + \alpha_{22} \sigma_{yy} + \alpha_{23} \sigma_{zz} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \alpha_{13} \sigma_{xx} + \alpha_{23} \sigma_{yy} + \alpha_{33} \sigma_{zz} \end{cases}$$

Эта система в матричной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(3.4.1)

$$\text{То есть: } \sigma_{zz} = \beta_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_{33} \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Касательные напряжения можно определить из систем (2.2.7), (2.2.2):

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = \lambda_{55}^{(4.4)} \varepsilon_{xz}^{(2.6)} = \lambda_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zy} &= \sigma_{yz} = \lambda_{44}^{(4.4)} \varepsilon_{yz}^{(2.5)} = \lambda_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Поэтому граничные условия на гранях $z = 0, z = c$ описываются системой:

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_{33} \frac{\partial w}{\partial z} &= \sigma_{zzq} \\ \lambda_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \sigma_{zxq} \\ \lambda_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \sigma_{zyq} \end{aligned} \right., \quad q = 0, c \quad (3.4.2)$$

Подставляя представления перемещений в виде (3.2.1) в систему (3.4.2) при условиях $z = q$ ($q = 0, c$) и требуя удовлетворения системы в точках колокации, имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_{13} \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N u_{ij}(q) \frac{\partial \varphi_i^u(\xi_k)}{\partial x} \psi_j^u(\eta_p) + \beta_{23} \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N v_{ij}(q) \frac{\partial \psi_j^v(\eta_p)}{\partial y} \varphi_i^v(\xi_k) + \beta_{33} \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N \frac{\partial w_{ij}(q)}{\partial z} \varphi_i^w(\xi_k) \psi_j^w(\eta_p) &= \sigma_{zzq} \\ \lambda_{55} \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N w_{ij}(q) \frac{\partial \varphi_i^u(\xi_k)}{\partial x} \psi_j^u(\eta_p) + \lambda_{55} \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N \frac{\partial u_{ij}(q)}{\partial z} \varphi_i^u(\xi_k) \psi_j^u(\eta_p) &= \sigma_{zxq} \\ \lambda_{44} \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N w_{ij}(q) \frac{\partial \psi_j^v(\eta_p)}{\partial y} \varphi_i^v(\xi_k) + \lambda_{44} \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N \frac{\partial v_{ij}(q)}{\partial z} \varphi_i^v(\xi_k) \psi_j^v(\eta_p) &= \sigma_{zyq} \end{aligned} \right. \quad (3.4.3)$$

Тут: $k = \overline{0..N}, p = \overline{0..M}, q = 0, c$

Эта система $6(N+1)(M+1)$ линейных уравнений относительно неизвестных

$$u_{ij}(q), \frac{\partial u_{ij}(q)}{\partial z}, v_{ij}(q), \frac{\partial v_{ij}(q)}{\partial z}, w_{ij}(q), \frac{\partial w_{ij}(q)}{\partial z}, \quad q = 0, c.$$

При этом, $3(N+1)(M+1)$ граничных условий заданы на грани $z = 0$ ($q = 0$) и столько же – на грани $z = c$ ($q = c$).

Введем систему обозначений:

$$a_{ij}(z) = S_{j1}^a(z), \quad S_{j2}^a(z) = \frac{\partial S_{j1}^a(z)}{\partial z}, \quad a = u, v, w, \quad i = 0..N, \quad j = 0..M. \quad (3.4.4)$$

При таких обозначениях обозначим векторы неизвестных функций:

$$\overline{S_i^a}(z) = (S_{00_i}^a(z) \dots S_{0M_i}^a(z) \dots S_{N0_i}^a(z) \dots S_{NM_i}^a(z))^T, \quad i = 1, 2, \quad a = u, v, w \quad (3.4.5)$$

Обозначим через $A[\frac{\partial^n \varphi_a}{\partial x^n}, \frac{\partial^m \psi_a}{\partial y^m}]$ матрицу размерности

$(N+1)(M+1) \times (N+1)(M+1)$ вида:

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial^n \varphi_0^a}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_0^a}{\partial y^m} & \dots & \frac{\partial^n \varphi_0^a}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_M^a}{\partial y^m} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^n \varphi_N^a}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_0^a}{\partial y^m} & \dots & \frac{\partial^n \varphi_N^a}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_M^a}{\partial y^m} \\ \frac{\partial^n \varphi_0^a}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_0^{a^1}}{\partial y^m} & \dots & \frac{\partial^n \varphi_0^a}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_M^{a^1}}{\partial y^m} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^n \varphi_N^a}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_0^{a^1}}{\partial y^m} & \dots & \frac{\partial^n \varphi_N^a}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_M^{a^1}}{\partial y^m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^n \varphi_0^a}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_0^{a^M}}{\partial y^m} & \dots & \frac{\partial^n \varphi_0^a}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_M^{a^M}}{\partial y^m} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^n \varphi_N^a}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_0^{a^M}}{\partial y^m} & \dots & \frac{\partial^n \varphi_N^a}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_M^{a^M}}{\partial y^m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^n \varphi_0^{a^N}}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_0^{a^M}}{\partial y^m} & \dots & \frac{\partial^n \varphi_0^{a^N}}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_M^{a^M}}{\partial y^m} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^n \varphi_0^{a^N}}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_0^{a^M}}{\partial y^m} & \dots & \frac{\partial^n \varphi_0^{a^N}}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^m \psi_M^{a^M}}{\partial y^m} \end{array} \right) \quad (3.4.6)$$

Через $A[\varphi_a, \psi_a]$ обозначим матрицу размерности $(N+1)(M+1) \times (N+1)(M+1)$ вида:

$$\left(\begin{array}{cccc} \varphi_0^a \cdot \psi_0^a & \dots & \varphi_0^a \cdot \psi_M^a & \dots & \dots & \dots & \varphi_N^a \cdot \psi_0^a & \dots & \varphi_N^a \cdot \psi_M^a \\ \varphi_0^a \cdot \psi_0^{a^1} & \dots & \varphi_0^a \cdot \psi_M^{a^1} & \dots & \dots & \dots & \varphi_N^a \cdot \psi_0^{a^1} & \dots & \varphi_N^a \cdot \psi_M^{a^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^a \cdot \psi_0^{a^M} & \dots & \varphi_0^a \cdot \psi_M^{a^M} & \dots & \dots & \dots & \varphi_N^a \cdot \psi_0^{a^M} & \dots & \varphi_N^a \cdot \psi_M^{a^M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0^{a^N} \cdot \psi_0^{a^M} & \dots & \varphi_0^{a^N} \cdot \psi_M^{a^M} & \dots & \dots & \dots & \varphi_0^{a^N} \cdot \psi_0^{a^M} & \dots & \varphi_0^{a^N} \cdot \psi_M^{a^M} \end{array} \right) \quad (3.4.7)$$

В обозначениях (3.4.6), (3.4.7):

$$\varphi_i^{a^j} = \varphi_i^a(\xi_j), \quad \psi_k^{a^l} = \psi_k^a(\eta_l), \quad i, j = 1..N, \quad k, l = 1..M, \quad a = u, v, w \quad (3.4.8)$$

В рамках обозначений (3.4.6) - (3.4.8) определим матрицы коэффициентов размерности $(N+1)(M+1) \times (N+1)(M+1)$ каждая:

$$\begin{aligned} A_1^u &= A[\varphi_u, \psi_u], & A_2^u &= A[\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x^2}, \psi_u], & A_3^u &= A[\varphi_u, \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial y^2}], & A_4^u &= A[\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}, \frac{\partial \psi_u}{\partial y}], \\ A_5^u &= A[\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}, \psi_w], & A_1^v &= A[\varphi_v, \psi_v], & A_2^v &= A[\frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial x^2}, \psi_v], & A_3^v &= A[\varphi_v, \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial y^2}], \\ A_4^v &= A[\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}, \frac{\partial \psi_u}{\partial y}], & A_5^v &= A[\varphi_w, \frac{\partial \psi_w}{\partial y}], & A_1^w &= A[\varphi_w, \psi_w], & A_2^w &= A[\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}, \psi_u], \\ A_3^w &= A[\varphi_v, \frac{\partial \psi_v}{\partial y}], & A_4^w &= A[\frac{\partial^2 \varphi_w}{\partial x^2}, \psi_w], & A_5^w &= A[\varphi_w, \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial y^2}] \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Перепишем систему (3.4.2), в обозначениях (3.4.9):

$$\begin{cases} \beta_{13} A_2^w \overline{S_1^u(q)} + \beta_{23} A_3^w \overline{S_1^v(q)} + \beta_{33} A_4^w \overline{S_2^w(q)} = \sigma_{zzq} \\ \lambda_{55} A_4^u \overline{S_2^u(q)} + \lambda_{55} A_5^u \overline{S_2^v(q)} = \sigma_{zxq} \\ \lambda_{44} A_4^v \overline{S_2^v(q)} + \lambda_{44} A_5^v \overline{S_1^w(q)} = \sigma_{zyq} \end{cases} \quad (3.4.10)$$

$$\text{Обозначим: } \overline{S(q)} = \begin{pmatrix} \overline{S_1^u(q)} \\ \overline{S_2^u(q)} \\ \overline{S_1^v(q)} \\ \overline{S_2^v(q)} \\ \overline{S_1^w(q)} \\ \overline{S_2^w(q)} \end{pmatrix}, \quad q = 0, c. \quad (3.4.11)$$

Тогда систему (3.4.10), которая удовлетворяет граничные условия на гранях $z = 0, z = c$, можно переписать в векторно-матричном виде:

$$B_q \cdot \overline{S(q)} = \overline{f_q}, \quad q = 0, c \quad (3.4.12)$$

Тут:

$$\dim \overline{S(q)} = 6(N+1)(M+1)$$

$$\dim B_q = 3(N+1)(M+1) \times 6(N+1)(M+1)$$

$$\dim \overline{f_q} = 3(N+1)(M+1)$$

$$B_q = \begin{pmatrix} A_1^1 & 0 & A_1^3 & 0 & 0 & A_1^6 \\ 0 & 0 & 0 & A_2^4 & A_2^5 & 0 \\ 0 & A_3^2 & 0 & 0 & A_3^5 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.13)$$

$$A_1^1 = \beta_{13} A_2^w; \quad A_1^3 = \beta_{23} A_3^w; \quad A_1^6 = \beta_{33} A_4^w;$$

$$A_2^4 = \lambda_{44} A_4^v; \quad A_2^5 = \lambda_{44} A_5^v; \quad (3.4.14)$$

$$A_3^2 = \lambda_{55} A_1^u; \quad A_3^5 = \lambda_{55} A_5^u;$$

$$\overline{f_q} = \begin{pmatrix} \overline{\sigma_{zzq}} \\ \overline{\sigma_{zyq}} \\ \overline{\sigma_{zxq}} \end{pmatrix}, \quad q = 0, c \quad (3.4.15)$$

Две системы вида (3.4.12) по $3(N+1)(M+1)$ уравнений каждая с учетом условий (3.4.13) – (3.4.15) задают граничные условия на гранях $z = 0, z = c$.

В случае свободных торцов при $z = 0, z = c$ система (3.4.12) является однородной, то есть $\overline{f_q} = \vec{0}$. В этом случае распределение напряжений в середине толстостенной пластины может быть обусловлено объемным внешним напряжением (например, собственный вес или сила инерции) с компонентами интенсивности X, Y, Z .

На гранях $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ могут быть заданы граничные условия двух типов: условия, которые соответствуют жестко закрепленному контуру и условия, которые соответствуют шарнирно опертому контуру. Аппроксимация этих граничных условий достигается путем подбора коэффициентов при B_3 сплайнах, через которые определяются функции φ_i^a, ψ_j^a , $a = u, v, w$. Функции $\varphi_i^a(x)$, $\psi_j^a(y)$ будем искать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0^a = \alpha_{11}^{a\varphi} B_3^{-1} + \alpha_{12}^{a\varphi} B_3^0 + \alpha_{13}^{a\varphi} B_3^1 \\ \varphi_1^a = \alpha_{21}^{a\varphi} B_3^{-1} + \alpha_{22}^{a\varphi} B_3^0 + \alpha_{23}^{a\varphi} B_3^1 \\ \varphi_i^a = B_3^i, \quad i = 2..N-2 \\ \varphi_{N-1}^a = \beta_{21}^{a\varphi} B_3^{N-1} + \beta_{22}^{a\varphi} B_3^N + \beta_{23}^{a\varphi} B_3^{N+1} \\ \varphi_N^a = \beta_{11}^{a\varphi} B_3^{N-1} + \beta_{12}^{a\varphi} B_3^N + \beta_{13}^{a\varphi} B_3^{N+1} \end{array} \right. \quad a = u, v, w \quad (3.4.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0^a = \alpha_{11}^{a\psi} B_3^{-1} + \alpha_{12}^{a\psi} B_3^0 + \alpha_{13}^{a\psi} B_3^1 \\ \psi_1^a = \alpha_{21}^{a\psi} B_3^{-1} + \alpha_{22}^{a\psi} B_3^0 + \alpha_{23}^{a\psi} B_3^1 \\ \psi_i^a = B_3^i, \quad i = 2..M-2 \\ \psi_{M-1}^a = \beta_{21}^{a\psi} B_3^{M-1} + \beta_{22}^{a\psi} B_3^M + \beta_{23}^{a\psi} B_3^{M+1} \\ \psi_M^a = \beta_{11}^{a\psi} B_3^{M-1} + \beta_{12}^{a\psi} B_3^M + \beta_{13}^{a\psi} B_3^{M+1} \end{array} \right. \quad a = u, v, w \quad (3.4.17)$$

• Рассмотрим граничные условия на грани $x=0$.

1. Жестко закрепленный контур.

Этому случаю соответствуют условия:

$$u(0, y, z) \equiv 0, \quad v(0, y, z) \equiv 0, \quad w(0, y, z) \equiv 0, \quad -(\sigma_{xx} \equiv 0) \quad (3.4.18)$$

Определим σ_{xx} из соотношения (3.4.1):

$$\sigma_{xx} = \beta_{11} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) + \beta_{12} \frac{\partial v}{\partial y}(0, y, z) + \beta_{13} \frac{\partial w}{\partial z}(0, y, z).$$

Поскольку $v(0, y, z) \equiv 0$, $w(0, y, z) \equiv 0$, отсюда следует, что :

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0, y, z) \equiv 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z}(0, y, z) \equiv 0. \quad \text{Тогда для выполнения условия } -(\sigma_{xx} \equiv 0)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) \equiv 0\right). \quad (3.4.19)$$

Из (3.2.1) имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) = \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N u_{ij}(z) \frac{\partial \varphi_i''(0)}{\partial x} \psi_j''(y) = \sum_{j=0}^M \psi_j''(y) \left[u_{0j}(z) \frac{\partial \varphi_0''(0)}{\partial x} + u_{1j}(z) \frac{\partial \varphi_1''(0)}{\partial x} \right].$$

Последнее равенство вытекает из того, что $\varphi_i''(0) = B_3^i(0) = 0$, $i = 2..N$.

Поэтому для выполнения условия (3.4.19) достаточно, чтобы хотя бы

одно из значений $\frac{\partial \varphi_0''(0)}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_1''(0)}{\partial x}$ не равнялось нулю одновременно.

То есть, условия (3.4.18) могут быть заменены на условия:

$$\begin{cases} u(0, y, z) \equiv 0 \\ v(0, y, z) \equiv 0 \\ w(0, y, z) \equiv 0 \\ \left[\frac{\partial \varphi_0''(0)}{\partial x} \neq 0 \right. \\ \left. \frac{\partial \varphi_1''(0)}{\partial x} \neq 0 \right] \end{cases} \quad (3.4.20)$$

А для выполнения условий (3.4.20) достаточно, чтобы выполнялась система:

$$\begin{cases} \varphi_0^a(0) = 0 \\ \varphi_1^a(0) = 0, \quad a = u, v, w \\ \left[\frac{\partial \varphi_0''(0)}{\partial x} \neq 0 \right. \\ \left. \frac{\partial \varphi_1''(0)}{\partial x} \neq 0 \right] \end{cases} \quad (3.4.21)$$

Для этого выберем коэффициенты:

$$\alpha_{11}^{a\sigma} = -4, \quad \alpha_{12}^{a\sigma} = 1, \quad \alpha_{13}^{a\sigma} = 0, \quad \alpha_{21}^{a\sigma} = 1, \quad \alpha_{22}^{a\sigma} = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_{23}^{a\sigma} = 1, \quad a = u, v, w \quad (3.4.22)$$

С учетом того, что

$$B_3^{-1}(0) = \frac{1}{6}, \quad B_3^0(0) = \frac{4}{6}, \quad B_3^1(0) = \frac{1}{6}, \quad \frac{\partial B_3^{-1}}{\partial x}(0) = -\frac{1}{2h}, \quad \frac{\partial B_3^0}{\partial x}(0) = 0, \quad \frac{\partial B_3^1}{\partial x}(0) = \frac{1}{2h} \quad (3.4.23)$$

имеем:

$$\begin{aligned}\varphi_0^a(0) &= -4 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{4}{6} = 0 \\ \varphi_1^a(0) &= 1 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_0^a}{\partial x}(0) &= -\frac{1}{2h} \cdot (-4) + 1 \cdot 0 = \frac{2}{h} \neq 0 \\ \frac{\partial \varphi_1^a}{\partial x}(0) &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2h}\right) - \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2h} = 0\end{aligned}, a = u, v, w$$

Как видно, выбранные в форме (3.4.22) коэффициенты удовлетворяют системе (3.4.21), что автоматически тянет за собой выполнение условий (3.4.18). Поэтому для жестко закрепленного контура $x=0$ функции φ_0^a , φ_1^a , $a = u, v, w$ примут вид:

$$\varphi_0^a = -4 \cdot B_3^{-1} + B_3^0 \quad (3.4.24)$$

$$\varphi_1^a = B_3^{-1} - \frac{1}{2} B_3^0 + B_3^1 \quad (3.4.25)$$

2. Шарнирно опертый контур.

Этому случаю удовлетворяют условия:

$$-(u(0, y, z) \equiv 0), \quad v(0, y, z) \equiv 0, \quad w(0, y, z) \equiv 0, \quad \sigma_{xx0} \equiv 0 \quad (3.4.26)$$

Из представленных выше рассуждений следует, что условие $\sigma_{xx0} \equiv 0$ можно заменить условием $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) \equiv 0$. Для этого случая положим коэффициенты:

$$\alpha_{11}^{u_p} = 0, \quad \alpha_{12}^{u_p} = 1, \quad \alpha_{13}^{u_p} = 0, \quad \alpha_{21}^{u_p} = 1, \quad \alpha_{22}^{u_p} = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_{23}^{u_p} = 1 \quad (3.4.27)$$

$$\alpha_{11}^{a_p} = -4, \quad \alpha_{12}^{a_p} = 1, \quad \alpha_{13}^{a_p} = 0, \quad \alpha_{21}^{a_p} = 1, \quad \alpha_{22}^{a_p} = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_{23}^{a_p} = 1, \quad a = v, w \quad (3.4.28)$$

Для определенных согласно (3.4.27), (3.4.28) коэффициентов с условием (3.4.23) имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_0^a(0) &= -4 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{4}{6} = 0 \\ \varphi_1^a(0) &= 1 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_0^a}{\partial x}(0) &= -\frac{1}{2h} \cdot (-4) + 1 \cdot 0 = \frac{2}{h} \neq 0 \\ \frac{\partial \varphi_1^a}{\partial x}(0) &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2h}\right) - \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2h} = 0 \\ \varphi_0^u(0) &= 1 \cdot \frac{4}{6} \neq 0 \end{aligned} \quad , a = v, w$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^u(0) &= 1 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial \varphi_0^u}{\partial x}(0) &= 1 \cdot 0 = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1^u}{\partial x}(0) &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2h}\right) - \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2h} = 0 \end{aligned}$$

Как видим, выбранные в форме (3.4.27), (3.4.28) коэффициенты позволяют удовлетворить граничные условия (3.4.26). Поэтому для шарнирно опертого контура $x=0$ функции φ_0^a , φ_1^a , $a = v, w$ примут вид:

$$\varphi_0^a = -4 \cdot B_3^{-1} + B_3^0 \quad (3.4.29)$$

$$\varphi_1^a = B_3^{-1} - \frac{1}{2} B_3^0 + B_3^1 \quad (3.4.30)$$

А функции φ_0^u , φ_1^u :

$$\varphi_0^u = B_3^0 \quad (3.4.31)$$

$$\varphi_1^u = B_3^{-1} - \frac{1}{2} B_3^0 + B_3^1 \quad (3.4.32)$$

Аналогично определяются граничные условия на других гранях.

- Граничные условия на грани $x = a$.

1. Жестко закрепленный контур.

функции $\varphi_{N-1}^a, \varphi_N^a, a = u, v, w$ примут вид:

$$\varphi_{N-1}^a = B_3^{N-1} - \frac{1}{2} B_3^N + B_3^{N+1} \quad (3.4.33)$$

$$\varphi_N^a = B_3^N - 4 \cdot B_3^{N+1} \quad (3.4.34)$$

2. Шарнирно опертый контур.

функции $\varphi_{N-1}^a, \varphi_N^a, a = v, w$ примут вид:

$$\varphi_N^a = -4 \cdot B_3^{N+1} + B_3^N \quad (3.4.35)$$

$$\varphi_{N-1}^a = B_3^{N-1} - \frac{1}{2} B_3^N + B_3^{N+1} \quad (3.4.36)$$

А функции $\varphi_N^u, \varphi_{N-1}^u$:

$$\varphi_N^u = B_3^N \quad (3.4.37)$$

$$\varphi_{N-1}^u = B_3^{N-1} - \frac{1}{2} B_3^N + B_3^{N+1} \quad (3.4.38)$$

- Граничные условия на грани $y = 0$.

1. Жестко закрепленный контур.

функции $\psi_0^a, \psi_1^a, a = u, v, w$ примут вид:

$$\psi_1^a = B_3^{-1} - \frac{1}{2} B_3^0 + B_3^1 \quad (3.4.39)$$

$$\psi_0^a = B_3^0 - 4 \cdot B_3^{-1} \quad (3.4.40)$$

2. Шарнирно опертый контур.

функции $\psi_0^a, \psi_1^a, a = u, w$ примут вид:

$$\psi_0^a = -4 \cdot B_3^{-1} + B_3^0 \quad (3.4.41)$$

$$\psi_1^a = B_3^{-1} - \frac{1}{2} B_3^0 + B_3^1 \quad (3.4.42)$$

А функции ψ_0^v, ψ_1^v :

$$\psi_0^v = B_3^0 \quad (3.4.43)$$

$$\psi_1^v = B_3^{-1} - \frac{1}{2} B_3^0 + B_3^1 \quad (3.4.44)$$

- Граничные условия на грани $y = b$.

1. Жестко закрепленный контур.

функции $\psi_{M-1}^a, \psi_M^a, a = u, v, w$ принимают вид:

$$\psi_{M-1}^a = B_3^{M-1} - \frac{1}{2} B_3^M + B_3^{M+1} \quad (3.4.45)$$

$$\psi_M^a = B_3^M - 4 \cdot B_3^{M+1} \quad (3.4.46)$$

2. Шарнирно опертый контур.

функции $\psi_{M-1}^a, \psi_M^a, a = u, w$ принимают вид:

$$\psi_M^a = -4 \cdot B_3^{M+1} + B_3^M \quad (3.4.47)$$

$$\psi_{M-1}^a = B_3^{M-1} - \frac{1}{2} B_3^M + B_3^{M+1} \quad (3.4.48)$$

А функции ψ_M^v, ψ_{M-1}^v :

$$\psi_M^u = B_3^M \quad (3.4.49)$$

$$\psi_{M-1}^u = B_3^{M-1} - \frac{1}{2} B_3^M + B_3^{M+1} \quad (3.4.50)$$

Определенные таким образом функции $\varphi_i^a, \psi_j^a, a = u, v, w$ позволяют удовлетворить граничные условия на гранях $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ точно.

3.5 Описание алгоритма решения задач статики ортотропных прямоугольных толстостенных пластин

В этом подразделе приведем описание алгоритма решения задачи статики ортотропных прямоугольных толстостенных пластин, находящихся под действием нормальной нагрузки и определенным образом закрепленных на торцах.

Задачи данного класса в общем случае анизотропного тела с одной плоскостью упругой симметрии описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами (2.4.1). На боковых гранях пластины задаются граничные условия, варианты которых приведены в формулах (2.4.3).

Предлагается подход к решению трехмерных задач о напряженно-деформированном состоянии прямоугольных толстостенных ортотропных пластин, основанный на понижении размерности задачи при помощи сплайн-коллокации и решении полученной при этом одномерной краевой задачи устойчивым методом дискретной ортогонализации.

Разрешающими функциями системы дифференциальных уравнений (2.4.1) являются компоненты вектора перемещений u, v, w . При этом все неизвестные функции входят в систему (2.4.1) со своими частными производными до второго порядка включительно по всем трем переменным, что позволяет использовать для их аппроксимации кубические B -сплайны.

Кубические B -сплайны $B_3^i(j=\overline{-1, N+1})$, $B_3^j(j=\overline{-1, M+1})$ строятся на равномерных сетках $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = a$ и $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = b$ соответственно с учетом граничных условий при $x=0, x=a, y=0, y=b$.

Использование метода сплайн-коллокации для данного класса задач на базе функций $B_3^i(j=\overline{-1, N+1})$, $B_3^j(j=\overline{-1, M+1})$ требует вычислять в каждой из точек коллокации $(\xi_k, \eta_p), k=\overline{0, N}, p=\overline{0, M}$ значения всех сплайнов B_3^i, B_3^j и их производных до второго порядка включительно.

Для удовлетворения граничных условий на боковых гранях в каждой точке колокации по значениям функций $B_3^i(s_x)$, $B_3^i(s_y)$ и их производных вычисляются значения функций $\varphi_i^a(x)$, $\psi_j^a(y)$, $a=u,v,w$ и их производных.

Из свойств базисных сплайнов вытекает, что на каждом интервале $[s_k, s_{k+1}]$ отличающиеся от нуля лишь функции B_3^{k-1} , B_3^k , B_3^{k+1} , B_3^{k+2} , а все другие тождественно равны нулю.

Из функций $\varphi_i^a(x)$, $\psi_j^a(y)$, $a=u,v,w$ и их производных формируются квадратные матрицы $A_1^u = A[\varphi_u, \psi_u]$, $A_2^u = A[\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x^2}, \psi_u]$, $A_3^u = A[\varphi_u, \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial y^2}]$, $A_4^u = A[\frac{\partial \varphi_u}{\partial x}, \frac{\partial \psi_u}{\partial y}]$, $A_1^v = A[\frac{\partial \varphi_v}{\partial x}, \psi_v]$, $A_2^v = A[\frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial x^2}, \psi_v]$, $A_3^v = A[\varphi_v, \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial y^2}]$, $A_4^v = A[\frac{\partial \varphi_v}{\partial x}, \frac{\partial \psi_v}{\partial y}]$, $A_1^w = A[\varphi_w, \psi_w]$, $A_2^w = A[\frac{\partial^2 \varphi_w}{\partial x^2}, \psi_w]$, $A_3^w = A[\varphi_w, \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial y^2}]$, $A_4^w = A[\frac{\partial \varphi_w}{\partial x}, \frac{\partial \psi_w}{\partial y}]$.

Точки колокации (ξ_k, η_p) : $\xi_k, k=0..N$, $\eta_p, p=0..M$ выбираются исходя из следующих соображений. Для обеспечения наилучшей аппроксимации следует рассматривать сетку с четным количеством узлов по каждому из направлений: $N=2n+1$, $M=2m+1$. На промежутках $[x_{2i}, x_{2i+1}]$, $[y_{2j}, y_{2j+1}]$ берется по 2 узла колокации, а на промежутках $[x_{2i+1}, x_{2i+2}]$, $[y_{2j+1}, y_{2j+2}]$ не выбирается ни одного:

$\xi_{2i} \in [x_{2i}, x_{2i+1}]$, $\xi_{2i+1} \in [x_{2i}, x_{2i+1}]$, $\eta_{2j} \in [y_{2j}, y_{2j+1}]$, $\eta_{2j+1} \in [y_{2j}, y_{2j+1}]$. В середине промежутков узлы задаются по правилу: $\xi_{2i} = x_{2i} + s_1 h_x$, $\xi_{2i+1} = x_{2i} + s_2 h_x$, $\eta_{2j} = y_{2j} + s_1 h_y$, $\eta_{2j+1} = y_{2j} + s_2 h_y$, $i=0..n$, $j=0..m$, где s_1, s_2 – корни полинома

Лежандра второго порядка на отрезке $[0,1]$, что равняются $s_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Такой набор узлов колокации является оптимальным и обеспечивает точность аппроксимации по каждому направлению равной $O(h_x^3)$, $O(h_y^3)$ соответственно.

В этом случае матрицы $(A_i^a)^{-1}$, $a = u, v, w$ существуют, то есть, систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно привести к нормальному виду. Для их обращения используется метод Гаусса с выбором главного элемента.

С помощью метода сплайн-коллокации исходная трехмерная краевая задача сводится к решению одномерной краевой задачи вида (3.3.1) с граничными условиями (3.3.2), (3.3.3).

Краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3.1) с граничными условиями (3.3.2), (3.3.3) решается численно устойчивым методом дискретной ортогонализации. Решение осуществляется в два этапа. На первом этапе в начальной точке интегрирования формируется система линейных независимых векторов-решений с учетом граничных условий на левом конце интервала, а затем на всем отрезке интегрирования методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности решаются задачи Коши.

В некоторых фиксированных точках (назовем их точками ортогонализации) векторы-решения ортогонализуются. При этом в каждой точке ортогонализации необходимо хранить информацию об ортогонализированных векторах \bar{z}_r ($r = \overline{1, m+1}$, $m = 2(N+1)$) и матрицах преобразования. При решении задач эта информация учитывается в точках выдачи результатов. На втором этапе после удовлетворения в конечной точке интегрирования граничным условиям на правом конце, в точках выдачи результатов вычисляются компоненты векторов $u(z)$, $v(z)$, $w(z)$, а по ним, используя выражение (3.2.1) вычисляются значения искомых функций u, v, w и их производных.

Разработанный алгоритм решения задачи о напряженно-деформированном состоянии толстостенной прямоугольной анизотропной пластины позволяет получить решение в широком диапазоне изменения механических постоянных, нормальной нагрузки и граничных условий и вычислить все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины такие как перемещения, деформации и напряжения.

Таким образом, блок-схему вышеописанного алгоритма можно представить в таком виде

1. Представление решения трехмерной краевой задачи в виде отрезков рядов функций, сформированный из B -сплайнам третьей степени. Коэффициенты рядов на этом этапе неизвестны.
2. Формирование сплайн функций, точно удовлетворяющих граничным условиям подбором коэффициентов линейных комбинаций B -сплайнов.
3. Выбор точек коллокации и нахождение значений линейных комбинаций B -сплайнов и их производных в этих точках.
4. Подстановка решения, представленного в виде отрезков рядов по линейным комбинациям B -сплайнов, в исходную систему дифференциальных уравнений в частных производных в точках коллокации.
5. Решение полученной одномерной краевой задачи, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов рядов по линейным комбинациям B -сплайнов в каждой точке коллокации, с помощью метода дискретной ортогонализации.
6. Подстановка полученных коэффициентов в ряды и нахождение по ним значений всех факторов напряженно-деформированного состояния пластины.

Схема алгоритма решения задачи показана на рис. 4.

На основе приведенного алгоритма разработан комплекс программ, с помощью которого проводится решение данного класса задач на ПК. При построении программ предусматривалось, чтобы они обладали наибольшей общностью в смысле постановки задач и были эффективны в отношении точности и устойчивости решений, а также экономичны по времени и использованию ресурсов ПК.

Программы, реализующая на ПК рассмотренный алгоритм решения данных классов задач, состоит из отдельных подпрограмм, написанных на языке

FORTRAN, которые отвечают за отдельные процедуры вычислительного процесса.

Комплекс состоит из двух отдельных программ, первая из которых находит решение одномерной краевой задачи, полученной в результате сплайн-коллокации по направляющей. Вторая программа служит для обработки начальных данных, построения разрешающей системы уравнений и её сведения к одномерной задаче методом сплайн-коллокации в двух направлениях. Также эта программа использует данные, полученные в результате работы первой программы для подстановки их в ряды и нахождения всех факторов напряженно-деформированного состояния пластины.

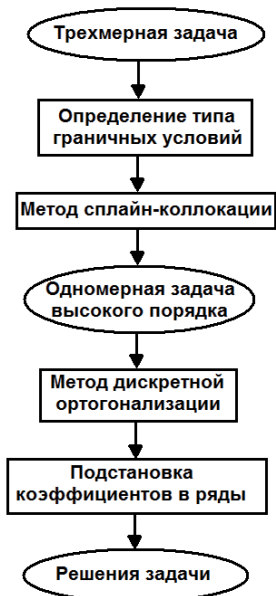


Рис. 4. Схема алгоритма решения задач про напряженно-деформированное состояние прямоугольных ортотропных пластин в трехмерной постановке.

Выводы

В разделе 3 были получены такие результаты:

1. Для сведения трехмерной краевой задачи о напряженно-деформированном состоянии прямоугольных изотропных, ортотропных и анизотропных с одной плоскостью упругой симметрии толстостенных пластин, которое описывается системой трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, к одномерной краевой задаче высокого порядка применен метод сплайн-коллокации по двум пространственным координатам.
2. Получена система обычных дифференциальных уравнений высокого порядка с соответствующими граничными условиями и для решения одномерной краевой задачи использован устойчивый метод дискретной ортогонализации.
3. Разработан алгоритм решения задач статики ортотропных прямоугольных толстостенных пластин и описана его реализация на ПК и использованием языка программирования FORTRAN.
4. На примере решения задачи о напряженно-деформированном состоянии изотропного куба с определенным образом выбранными компонентами объемного внешнего напряжения показан пример аналитического решения частным образом сформулированной задачи.

Раздел 4. Анализ напряженно-деформированного состояния прямоугольных толстостенных пластин

4.1 Некоторые оценки достоверности результатов решения классов рассматриваемых задач

Обоснование достоверности разработанной методики основано на использовании индуктивных приемов. Основным критерием достоверности результатов решения рассматриваемых в данной работе классов задач является сопоставление результатов, полученных описанными в разделе 2 методами с результатами, полученными численно-аналитическим методом с использованием разложения в ряды Фурье, а также с результатами, полученными методом сплайн-коллокации для двухмерной краевой задачи теории оболочек. Также для тестовой задачи рассмотрен случай аналитического решения.

Задача 1

Для случая шарнирного опирания боковых граней пластины целесообразно рассмотреть решение задачи на основе разложения в ряды Фурье и сравнить полученные им результаты с результатами по предлагаемой методике.

Для всех последующих задач этого раздела результаты будем представлять в обезразмеренном виде:

$$\bar{w} = \frac{w \cdot 10^4}{\sigma_{zzh}}, \quad \bar{u} = \frac{u \cdot 10^4}{\sigma_{zzh}}, \quad \bar{v} = \frac{v \cdot 10^4}{\sigma_{zzh}}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma \cdot 10^4}{\sigma_{zzh}}.$$

Рассмотрим пластину, упругие характеристики которой определяются коэффициентом Пуассона: $\nu = 0.3$.

Грани пластины возьмем равными $a = b = 1$, толщину $h = 0.1$. Возьмем компоненты интенсивности объемного внешнего напряжения:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \quad (4.1.1)$$

На гранях $z = 0$, $z = h$ граничные условия будут иметь вид:

$$\bar{\sigma}_{z0} = 1, \quad \bar{\sigma}_{x0} = \bar{\sigma}_{y0} = \bar{\sigma}_{zzh} = \bar{\sigma}_{zxh} = \bar{\sigma}_{zyh} = 0 \quad (4.1.2)$$

На гранях $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ задаются условия типа шарнирного опирания.

Неизвестные функции перемещений будем искать в виде:

$$u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(z) \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.1.3)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn}(z) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (4.1.4)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(z) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.1.5)$$

Здесь: $a = b = 1$.

Для каждой из гармоник ряда m, n получим краевую задачу вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{mn}(z)}{\partial z^2} &= -a_1 \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot u_{mn}(z) - a_2 \cdot \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cdot u_{mn}(z) - a_3 \cdot \frac{mn \pi^2}{ab} \cdot v_{mn}(z) + a_4 \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot w_{mn}^*(z) \\ \frac{\partial^2 v_{mn}(z)}{\partial z^2} &= -b_1 \cdot \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cdot v_{mn}(z) - b_2 \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot v_{mn}(z) - b_3 \cdot \frac{mn \pi^2}{ab} \cdot u_{mn}(z) + b_4 \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot w_{mn}^*(z) \\ \frac{\partial^2 w_{mn}(z)}{\partial z^2} &= -c_1 \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot u_{mn}^*(z) - c_2 \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot v_{mn}^*(z) - c_3 \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot w_{mn}(z) - c_4 \cdot \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cdot w_{mn}(z) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

С граничными условиями на грани $z = 0$:

$$\begin{aligned} -\beta_{13} \frac{m\pi}{a} u_{mn}(z) - \beta_{23} \frac{n\pi}{b} v_{mn}(z) + \beta_{33} \frac{\partial w_{mn}(z)}{\partial z} &= \frac{16}{\pi^2 mn} \\ \lambda_{55} \left(\frac{m\pi}{a} w_{mn}(z) + \frac{\partial u_{mn}(z)}{\partial z} \right) &= 0 \\ \lambda_{44} \left(\frac{n\pi}{b} w_{mn}(z) + \frac{\partial v_{mn}(z)}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

$z = h$:

$$\begin{aligned} -\beta_{13} \frac{m\pi}{a} u_{mn}(z) - \beta_{23} \frac{n\pi}{b} v_{mn}(z) + \beta_{33} \frac{\partial w_{mn}(z)}{\partial z} &= 0 \\ \lambda_{55} \left(\frac{m\pi}{a} w_{mn}(z) + \frac{\partial u_{mn}(z)}{\partial z} \right) &= 0 \\ \lambda_{44} \left(\frac{n\pi}{b} w_{mn}(z) + \frac{\partial v_{mn}(z)}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Найдя решения данных задач методом дискретной ортогонализации и подставя их в формулы (4.1.3) – (4.1.5), получим значения искомым функций перемещений.

Используя метод сплайн-коллокации, были получены результаты при разном количестве точек коллокации, а именно для $N = 8, N = 10, N = 12$ и при разном количестве точек дискретной ортогонализации ($N_1 = 50, N_2 = 100, N_3 = 200$). Полученные результаты практически одинаковы для рассмотренных вариантов дискретизации, что подтверждает сходимость метода. Данные расчетов в дальнейшем будем представлять для $N_2 = 100$.

Табл. 1

| Метод Фурье | | Метод сплайн-коллокации | | | | | | | | |
|-------------|-------------|-------------------------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------------|-------|-------|
| $N_1, M=10$ | $N_2, M=12$ | $N_1, M=8$ | | | $N_2, M=10$ | | | $N_3, M=12$ | | |
| | | N_1 | N_2 | N_3 | N_1 | N_2 | N_3 | N_1 | N_2 | N_3 |
| | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|-------|---------|----------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | 45.0203 | 45.49807 | 42.00 | 41.09 | 41.07 | 44.415 | 44.40 | 44.35 | 45.12 | 45.09 | 45.03 |
| x_2 | 45.1474 | 45.57635 | 42.14 | 42.13 | 42.13 | 44.452 | 44.41 | 44.37 | 45.17 | 45.12 | 45.07 |
| x_3 | 45.0297 | 45.50392 | 41.98 | 41.95 | 41.92 | 44.404 | 44.37 | 44.34 | 45.11 | 45.08 | 45.06 |

В табл. 1 представлены значения функции перемещения \bar{w} , посчитанные методом разделения переменных при количестве гармоник ряда $N, M = 10$, $N, M = 12$ и методом сплайн-коллокации при количестве точек коллокации $N, M = 8$, $N, M = 10$, $N, M = 12$. Расчеты проводились для точек:

$$x_1 = (0.5, 0.5, 0.001), \quad x_2 = (0.5, 0.5, 0.05), \quad x_3 = (0.5, 0.5, 0.099)$$

Сходимость результатов для различного количества точек дискретной ортогонализации свидетельствует о применимости данного метода.

Как видим, результаты, полученные двумя различными методами, практически совпадают, различие между ними находится в пределе 1%, что свидетельствует о высокой достоверности предложенного нами метода сплайн-коллокации в двух направлениях для случая шарнирно опертых боковых граней.

Задача 2

Для случая жесткой заделки нетолстой пластины сравним результаты, полученные нашим методом, с результатами, полученными для этой же пластины в рамках двухмерной теории упругости.

Рассмотрим пластину, упругие характеристики которой определяются коэффициентом Пуассона: $\nu = 0.3$.

Грани пластины возьмем равными 1, толщину – $h = 0.1$. Возьмем компоненты интенсивности объемного внешнего напряжения:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \tag{4.1.9}$$

На гранях $z = 0$, $z = h$ граничные условия будут иметь вид:

$$\overline{\sigma_{z0}} = 1, \quad \overline{\sigma_{z0}} = \overline{\sigma_{z10}} = \overline{\sigma_{zzh}} = \overline{\sigma_{zxh}} = \overline{\sigma_{zyh}} = 0 \tag{4.1.10}$$

На гранях $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ задаются условия жесткой заделки.

В этом случае полученные результаты были такими, как показано в табл. 2

Табл. 2

| Точки вывода | w(x, y, z) | | | | Случай двухмерной классической теории N = 10, N ₃ = 200 | Случай двухмерной уточненной теории N = 20, N ₃ = 200 |
|-----------------|------------|----------|----------|---------|---|---|
| | N, M=8 | N, M=10 | N, M=12 | | | |
| x ₁ | 17.33551 | 17.58311 | 17.76958 | - | - | |
| x ₂ | 17.35532 | 17.51377 | 17.71866 | 13.8092 | 16.43 | |
| x ₃ | 17.33482 | 17.57566 | 17.75352 | - | - | |
| x ₄ | 0.44823 | 0.52634 | 0.61329 | - | - | |
| x ₅ | 0.36532 | 0.40295 | 0.48821 | 0.3391 | 0.65 | |
| x ₆ | 0.43987 | 0.47860 | 0.59832 | - | - | |
| x ₇ | 8.98637 | 9.67733 | 10.23932 | - | - | |
| x ₈ | 9.07328 | 9.79538 | 10.86523 | 7.4902 | 9.41 | |
| x ₉ | 9.02764 | 9.64275 | 10.21996 | - | - | |
| x ₁₀ | 9.08794 | 9.90720 | 10.48476 | - | - | |
| x ₁₁ | 9.12658 | 9.98463 | 10.95763 | 7.4902 | 9.41 | |
| x ₁₂ | 9.06545 | 9.88370 | 10.45970 | - | - | |
| x ₁₃ | 0.42711 | 0.54609 | 0.62452 | - | - | |
| x ₁₄ | 0.35753 | 0.393471 | 0.49573 | 0.3391 | 0.65 | |
| x ₁₅ | 0.41008 | 0.47025 | 0.61673 | - | - | |

В этом и во всех следующих примерах:

$$x_i = (a_i, a_i, 0.5 \cdot \left\{ \frac{i-1}{3} \right\} \cdot h), \quad a_i = 0.5, i = \overline{1, 2, 3}, \quad a_i = 0.1, i = \overline{4, 5, 6},$$

$$a_i = 0.3, i = \overline{7, 8, 9}, \quad a_i = 0.7, i = \overline{10, 11, 12}, \quad a_i = 0.9, i = \overline{13, 14, 15}$$

Сравнение результатов, полученных в рамках двухмерной и трехмерной теорий позволяют говорить о высокой достоверности метода сплайн-коллокации в двух направлениях в случае решения задач о напряженно-деформированном состоянии толстостенных прямоугольных пластин с жестко закрепленными боковыми гранями в трехмерной постановке.

Задача 3

Рассмотрим частный случай аналитического решения задачи.

Рассмотрим изотропный куб с гранями равными $a=b=1$, с упругими характеристиками: коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, модуль упругости:

$$E = 1. \quad (4.1.11)$$

Перепишем систему (2.4.1) для случая изотропного тела в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + a_5 X \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = b_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_4 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + b_5 Y \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_2 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + c_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_5 Z \end{cases} \quad (4.1.12)$$

Для упругих характеристик (4.1.11), элементы матрицы упругой податливости имеют значения:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = \frac{1}{E} = 1, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{F} = 1, \quad \alpha_{33} = \frac{1}{E} = 1, \quad \alpha_{12} = -\frac{\nu}{E} = -0.3, \quad \alpha_{13} = -\frac{\nu}{E} = -0.3, \\ \alpha_{23} = -\frac{\nu}{E} = -0.3, \quad \alpha_{44} = \frac{1}{G} = 2.6, \quad \alpha_{55} = \frac{1}{G} = 2.6, \quad \alpha_{66} = \frac{1}{G} = 2.6. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Параметр:

$$\Delta = \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2) - \alpha_{12}(\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{23}) + \alpha_{13}(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}) = 0.676.$$

Коэффициенты $a_i, b_i, c_i, i = 1..5$ в системе (4.1.12), выражаются формулами:

$$a_1 = -\alpha_{55} \frac{\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2}{\Delta} = -3.5 \quad (4.1.14)$$

$$a_2 = -\frac{\alpha_{55}}{\alpha_{66}} = -1 \quad (4.1.15)$$

$$a_3 = -\alpha_{55} \left(\frac{\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33}}{\Delta} + \frac{1}{\alpha_{66}} \right) = -2.5 \quad (4.1.16)$$

$$a_4 = -2.5 \quad (4.1.17)$$

$$a_5 = -\alpha_{55} = -2.6 \quad (4.1.18)$$

$$b_1 = -\alpha_{44} \frac{\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}^2}{\Delta} = -3.5 \quad (4.1.19)$$

$$b_2 = -\frac{\alpha_{44}}{\alpha_{66}} = -1 \quad (4.1.20)$$

$$b_3 = -\alpha_{44} \left(\frac{\alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{33}}{\Delta} + \frac{1}{\alpha_{66}} \right) = -2.5 \quad (4.1.21)$$

$$b_4 = -2.5 \quad (4.1.22)$$

$$b_5 = -\alpha_{44} = -2.6 \quad (4.1.23)$$

$$c_1 = -\frac{\Delta + \alpha_{55}\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{55}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} = -2 \quad (4.1.24)$$

$$c_2 = -\frac{\Delta + \alpha_{44}\alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{44}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} = -2 \quad (4.1.25)$$

$$c_3 = -\frac{\Delta}{\alpha_{55}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} = -0.2857 \quad (4.1.26)$$

$$c_4 = -\frac{\Delta}{\alpha_{44}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2)} = -0.2857 \quad (4.1.27)$$

$$c_5 = -\frac{\Delta}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2} = -0.7428 \quad (4.1.28)$$

Тогда система (4.1.12) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -3.5 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2.5 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2.5 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - 2.6 \cdot X \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -3.5 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 1 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2.5 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2.5 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - 2.6 \cdot Y \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} - 0.2857 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 0.2857 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 0.7428 \cdot Z \end{array} \right. \quad (4.1.29)$$

Пусть компоненты интенсивности объемного внешнего напряжения имеют вид:

$$X = \cos \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \sin \pi z, \quad Y = \sin \pi x \cdot \cos \pi y \cdot \sin \pi z, \quad Z = \sin \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \cos \pi z. \quad (4.1.30)$$

Будем искать неизвестные перемещения в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \cos \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \sin \pi z \cdot u_0 \\ v(x, y, z) &= \sin \pi x \cdot \cos \pi y \cdot \sin \pi z \cdot v_0 \\ w(x, y, z) &= \sin \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \cos \pi z \cdot w_0 \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Подставляя представления перемещений в виде (4.1.31) в систему (4.1.29), имеем:

$$\begin{aligned}
 -\pi^2 \cdot \cos \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \sin \pi z \cdot u_0 &= 3.5 \cdot \pi^2 \cdot \cos \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \sin \pi z \cdot u_0 + \\
 &+ \pi^2 \cdot \cos \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \sin \pi z \cdot u_0 + \\
 &+ 2.5 \cdot \pi^2 \cdot \cos \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \sin \pi z \cdot v_0 + \\
 &+ 2.5 \cdot \pi^2 \cdot \cos \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \sin \pi z \cdot w_0 - \\
 &\quad -2.6 \cdot \cos \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \sin \pi z \\
 -\pi^2 \cdot \sin \pi x \cdot \cos \pi y \cdot \sin \pi z \cdot v_0 &= 3.5 \cdot \pi^2 \cdot \sin \pi x \cdot \cos \pi y \cdot \sin \pi z \cdot v_0 + \\
 &+ \pi^2 \cdot \sin \pi x \cdot \cos \pi y \cdot \sin \pi z \cdot v_0 + \\
 &+ 2.5 \cdot \pi^2 \cdot \sin \pi x \cdot \cos \pi y \cdot \sin \pi z \cdot u_0 + \\
 &+ 2.5 \cdot \pi^2 \cdot \sin \pi x \cdot \cos \pi y \cdot \sin \pi z \cdot w_0 - \\
 &\quad -2.6 \cdot \sin \pi x \cdot \cos \pi y \cdot \sin \pi z \\
 -\pi^2 \cdot \sin \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \cos \pi z \cdot w_0 &= 2 \cdot \pi^2 \cdot \sin \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \cos \pi z \cdot u_0 + \\
 &+ 2 \cdot \pi^2 \cdot \sin \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \cos \pi z \cdot v_0 + \\
 &+ 0.2857 \cdot \pi^2 \cdot \sin \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \cos \pi z \cdot w_0 + \\
 &+ 0.2857 \cdot \pi^2 \cdot \sin \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \cos \pi z \cdot w_0 - \\
 &\quad -0.7428 \cdot \sin \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \cos \pi z
 \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты уравнений при одинаковых комбинациях тригонометрических функций, имеем:

$$\begin{cases}
 -\pi^2 \cdot u_0 = 3.5 \cdot \pi^2 \cdot u_0 + \pi^2 \cdot u_0 + 2.5 \cdot \pi^2 \cdot v_0 + 2.5 \cdot \pi^2 \cdot w_0 - 2.6 \\
 -\pi^2 \cdot v_0 = 3.5 \cdot \pi^2 \cdot v_0 + \pi^2 \cdot v_0 + 2.5 \cdot \pi^2 \cdot u_0 + 2.5 \cdot \pi^2 \cdot w_0 - 2.6 \\
 -\pi^2 \cdot w_0 = 2 \cdot \pi^2 \cdot u_0 + 2 \cdot \pi^2 \cdot v_0 + 0.5704 \cdot \pi^2 \cdot w_0 - 0.7428
 \end{cases} \quad (4.1.33)$$

Или:

$$\begin{cases}
 5.5 \cdot u_0 + 2.5 \cdot v_0 + 2.5 \cdot w_0 = \frac{2.6}{\pi^2} \\
 5.5 \cdot v_0 + 2.5 \cdot u_0 + 2.5 \cdot w_0 = \frac{2.6}{\pi^2} \\
 1.5704 \cdot w_0 + 2 \cdot u_0 + 2 \cdot v_0 = \frac{0.7428}{\pi^2}
 \end{cases} \quad (4.1.34)$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 5.5 & 2.5 & 2.5 \\ 2.5 & 5.5 & 2.5 \\ 2 & 2 & 1.5704 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2635 \\ 0.2635 \\ 0.0753 \end{pmatrix} \quad (4.1.35)$$

Откуда: $u_0 = 0.088$, $v_0 = 0.088$, $w_0 = -0.176$.

То есть искомые перемещения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= 0.088 \cdot \cos \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \sin \pi z \\
 v(x, y, z) &= 0.088 \cdot \sin \pi x \cdot \cos \pi y \cdot \sin \pi z \\
 w(x, y, z) &= -0.176 \cdot \sin \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \cos \pi z
 \end{aligned}
 \tag{4.1.36}$$

Значения перемещений в точках сетки (сетка коллокации: 10 точек – корней полинома Лежандра второго порядка на каждом из отрезков по направлениям x и y , 21 точка вывода метода дискретной ортогонализации по направлению z) можно увидеть в следующих таблицах.

Точки вывода по координате x (метод сплайн-коллокации):

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0.02348, \quad x_1 = 0.08763, \quad x_2 = 0.24570, \quad x_3 = 0.30985, \\
 x_4 &= 0.46792, \quad x_5 = 0.53207, \quad x_6 = 0.69014, \quad x_7 = 0.75429, \\
 x_8 &= 0.91236, \quad x_9 = 0.97651
 \end{aligned}$$

Точки вывода по координате y (метод сплайн-коллокации):

$$\begin{aligned}
 y_0 &= 0.02348, \quad y_1 = 0.08763, \quad y_2 = 0.24570, \quad y_3 = 0.30985, \\
 y_4 &= 0.46792, \quad y_5 = 0.53207, \quad y_6 = 0.69014, \quad y_7 = 0.75429, \\
 y_8 &= 0.91236, \quad y_9 = 0.97651
 \end{aligned}$$

Точки вывода по координате z (метод дискретной ортогонализации):

$$0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$$

Функция перемещения $\bar{w}(x, y, z)$

$z = 0$:

Табл. 3

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| y_0 | 0.008 | 0.032 | 0.083 | 0.099 | 0.119 | 0.119 | 0.099 | 0.083 | 0.032 | 0.008 |
| y_1 | 0.032 | 0.120 | 0.308 | 0.365 | 0.440 | 0.440 | 0.365 | 0.308 | 0.120 | 0.032 |
| y_2 | 0.083 | 0.308 | 0.791 | 0.938 | 1.129 | 1.129 | 0.938 | 0.791 | 0.308 | 0.083 |
| y_3 | 0.099 | 0.365 | 0.938 | 1.112 | 1.338 | 1.338 | 1.112 | 0.938 | 0.365 | 0.099 |
| y_4 | 0.119 | 0.440 | 1.129 | 1.338 | 1.611 | 1.611 | 1.338 | 1.129 | 0.440 | 0.119 |
| y_5 | 0.119 | 0.440 | 1.129 | 1.338 | 1.611 | 1.611 | 1.338 | 1.129 | 0.440 | 0.119 |
| y_6 | 0.099 | 0.365 | 0.938 | 1.112 | 1.338 | 1.338 | 1.112 | 0.938 | 0.365 | 0.099 |
| y_7 | 0.083 | 0.308 | 0.791 | 0.938 | 1.129 | 1.129 | 0.938 | 0.791 | 0.308 | 0.083 |
| y_8 | 0.032 | 0.120 | 0.308 | 0.365 | 0.440 | 0.440 | 0.365 | 0.308 | 0.120 | 0.032 |
| y_9 | 0.008 | 0.032 | 0.083 | 0.099 | 0.119 | 0.119 | 0.099 | 0.083 | 0.032 | 0.008 |

$z = 0.2$:

Табл. 4

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| y_0 | 0.007 | 0.026 | 0.067 | 0.080 | 0.096 | 0.096 | 0.080 | 0.067 | 0.026 | 0.007 |
| y_1 | 0.026 | 0.097 | 0.249 | 0.295 | 0.356 | 0.356 | 0.295 | 0.249 | 0.097 | 0.026 |
| y_2 | 0.067 | 0.249 | 0.640 | 0.759 | 0.913 | 0.913 | 0.759 | 0.640 | 0.249 | 0.067 |

| | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| y_3 | 0.080 | 0.295 | 0.759 | 0.900 | 1.083 | 1.083 | 0.900 | 0.759 | 0.295 | 0.080 |
| y_4 | 0.096 | 0.356 | 0.913 | 1.083 | 1.303 | 1.303 | 1.083 | 0.913 | 0.356 | 0.096 |
| y_5 | 0.096 | 0.356 | 0.913 | 1.083 | 1.303 | 1.303 | 1.083 | 0.913 | 0.356 | 0.096 |
| y_6 | 0.080 | 0.295 | 0.759 | 0.900 | 1.083 | 1.083 | 0.900 | 0.759 | 0.295 | 0.080 |
| y_7 | 0.067 | 0.249 | 0.640 | 0.759 | 0.913 | 0.913 | 0.759 | 0.640 | 0.249 | 0.067 |
| y_8 | 0.026 | 0.097 | 0.249 | 0.295 | 0.356 | 0.356 | 0.295 | 0.249 | 0.097 | 0.026 |
| y_9 | 0.007 | 0.026 | 0.067 | 0.080 | 0.096 | 0.096 | 0.080 | 0.067 | 0.026 | 0.007 |

$z = 0.4$;

Табл. 5

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| y_0 | 0.002 | 0.010 | 0.025 | 0.030 | 0.036 | 0.036 | 0.030 | 0.025 | 0.010 | 0.002 |
| y_1 | 0.010 | 0.037 | 0.095 | 0.113 | 0.136 | 0.136 | 0.113 | 0.095 | 0.037 | 0.010 |
| y_2 | 0.025 | 0.095 | 0.244 | 0.290 | 0.349 | 0.349 | 0.290 | 0.244 | 0.095 | 0.025 |
| y_3 | 0.030 | 0.113 | 0.290 | 0.343 | 0.413 | 0.413 | 0.343 | 0.290 | 0.113 | 0.030 |
| y_4 | 0.036 | 0.136 | 0.349 | 0.413 | 0.497 | 0.497 | 0.413 | 0.349 | 0.136 | 0.036 |
| y_5 | 0.036 | 0.136 | 0.349 | 0.413 | 0.497 | 0.497 | 0.413 | 0.349 | 0.136 | 0.036 |
| y_6 | 0.030 | 0.113 | 0.290 | 0.343 | 0.413 | 0.413 | 0.343 | 0.290 | 0.113 | 0.030 |
| y_7 | 0.025 | 0.095 | 0.244 | 0.290 | 0.349 | 0.349 | 0.290 | 0.244 | 0.095 | 0.025 |
| y_8 | 0.010 | 0.037 | 0.095 | 0.113 | 0.136 | 0.136 | 0.113 | 0.095 | 0.037 | 0.010 |
| y_9 | 0.002 | 0.010 | 0.025 | 0.030 | 0.036 | 0.036 | 0.030 | 0.025 | 0.010 | 0.002 |

$z = 0.6$;

Табл. 6

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 |
|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| y_0 | -0.00 | -0.01 | -0.025 | -0.03 | -0.03 | -0.03 | -0.03 | -0.02 | -0.01 | -0.00 |
| y_1 | -0.01 | -0.03 | -0.095 | -0.11 | -0.13 | -0.13 | -0.11 | -0.09 | -0.03 | -0.01 |
| y_2 | -0.02 | -0.09 | -0.244 | -0.29 | -0.34 | -0.34 | -0.29 | -0.24 | -0.09 | -0.02 |
| y_3 | -0.03 | -0.11 | -0.290 | -0.34 | -0.41 | -0.41 | -0.34 | -0.29 | -0.11 | -0.03 |
| y_4 | -0.03 | -0.13 | -0.349 | -0.41 | -0.49 | -0.49 | -0.41 | -0.34 | -0.13 | -0.03 |
| y_5 | -0.03 | -0.13 | -0.349 | -0.41 | -0.49 | -0.49 | -0.41 | -0.34 | -0.13 | -0.03 |
| y_6 | -0.03 | -0.11 | -0.290 | -0.34 | -0.41 | -0.41 | -0.34 | -0.29 | -0.11 | -0.03 |
| y_7 | -0.02 | -0.09 | -0.244 | -0.29 | -0.34 | -0.34 | -0.29 | -0.24 | -0.09 | -0.02 |
| y_8 | -0.01 | -0.03 | -0.095 | -0.11 | -0.13 | -0.13 | -0.11 | -0.09 | -0.03 | -0.01 |
| y_9 | -0.00 | -0.01 | -0.025 | -0.03 | -0.03 | -0.03 | -0.03 | -0.02 | -0.01 | -0.00 |

$z = 0.8$;

Табл. 7

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| y_0 | -0.00 | -0.02 | -0.06 | -0.08 | -0.09 | -0.09 | -0.08 | -0.06 | -0.02 | -0.00 |
| y_1 | -0.02 | -0.09 | -0.24 | -0.29 | -0.35 | -0.35 | -0.29 | -0.24 | -0.09 | -0.02 |
| y_2 | -0.06 | -0.24 | -0.64 | -0.75 | -0.91 | -0.91 | -0.75 | -0.64 | -0.24 | -0.06 |
| y_3 | -0.08 | -0.29 | -0.75 | -0.90 | -1.08 | -1.08 | -0.90 | -0.75 | -0.29 | -0.08 |
| y_4 | -0.09 | -0.35 | -0.91 | -1.08 | -1.30 | -1.30 | -1.08 | -0.91 | -0.35 | -0.09 |
| y_5 | -0.09 | -0.35 | -0.91 | -1.08 | -1.30 | -1.30 | -1.08 | -0.91 | -0.35 | -0.09 |
| y_6 | -0.08 | -0.29 | -0.75 | -0.90 | -1.08 | -1.08 | -0.90 | -0.75 | -0.29 | -0.08 |
| y_7 | -0.06 | -0.24 | -0.64 | -0.75 | -0.91 | -0.91 | -0.75 | -0.64 | -0.24 | -0.06 |

| | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| y_8 | -0.02 | -0.09 | -0.24 | -0.29 | -0.35 | -0.35 | -0.29 | -0.24 | -0.09 | -0.02 |
| y_9 | -0.00 | -0.02 | -0.06 | -0.08 | -0.09 | -0.09 | -0.08 | -0.06 | -0.02 | -0.00 |

$z = 1$;

Табл. 8

| | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| y_0 | -0.00 | -0.03 | -0.08 | -0.09 | -0.11 | -0.11 | -0.09 | -0.08 | -0.03 | -0.00 |
| y_1 | -0.03 | -0.12 | -0.30 | -0.36 | -0.44 | -0.44 | -0.36 | -0.30 | -0.12 | -0.03 |
| y_2 | -0.08 | -0.30 | -0.79 | -0.93 | -1.12 | -1.12 | -0.93 | -0.79 | -0.30 | -0.08 |
| y_3 | -0.09 | -0.36 | -0.93 | -1.11 | -1.33 | -1.33 | -1.11 | -0.93 | -0.36 | -0.09 |
| y_4 | -0.11 | -0.44 | -1.12 | -1.33 | -1.61 | -1.61 | -1.33 | -1.12 | -0.44 | -0.11 |
| y_5 | -0.11 | -0.44 | -1.12 | -1.33 | -1.61 | -1.61 | -1.33 | -1.12 | -0.44 | -0.11 |
| y_6 | -0.09 | -0.36 | -0.93 | -1.11 | -1.33 | -1.33 | -1.11 | -0.93 | -0.36 | -0.09 |
| y_7 | -0.08 | -0.30 | -0.79 | -0.93 | -1.12 | -1.12 | -0.93 | -0.79 | -0.30 | -0.08 |
| y_8 | -0.03 | -0.12 | -0.30 | -0.36 | -0.44 | -0.44 | -0.36 | -0.30 | -0.12 | -0.03 |
| y_9 | -0.00 | -0.03 | -0.08 | -0.09 | -0.11 | -0.11 | -0.09 | -0.08 | -0.03 | -0.00 |

Также представим графики поверхностей, описывающие функции перемещения в сечении $z = 0.4$:

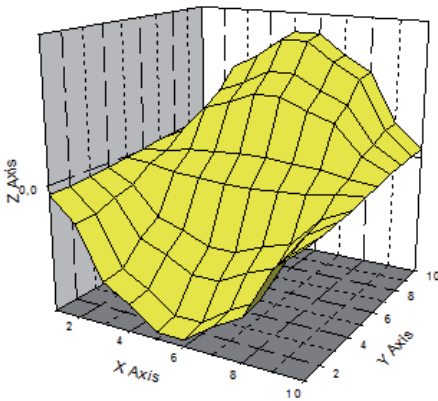


Рис.5. $\bar{u}(x, y, 0.4)$

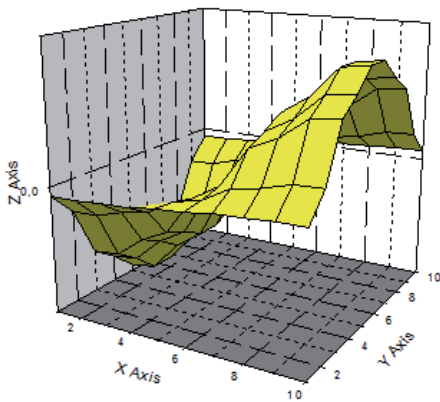


Рис.6. $\bar{v}(x, y, 0.4)$

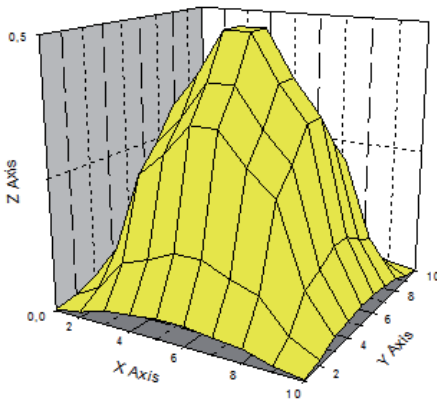


Рис.7. $\bar{w}(x, y, 0.4)$

Как видим, функция $\bar{u}(x, y, z)$ антисимметрична относительно оси x и симметрична относительно оси y . Функция $\bar{v}(x, y, z)$ антисимметрична относительно оси y и симметрична относительно оси x . Функция $\bar{w}(x, y, z)$ симметрична относительно обеих осей x и y .

Кроме того, представим сравнение результатов аналитического решения данной задачи с результатами, полученными путем решения методом сплайн-коллокации в точках (x_s, y_s, z_i) :

Табл. 9

| z_i | Аналитич. решение | Метод сплайн-коллокации, N,M=10 |
|-------|-------------------|---------------------------------|
| 0 | 1.611 | 1.601 |
| 0.2 | 1.303 | 1.295 |
| 0.4 | 0.497 | 0.488 |
| 0.6 | -0.497 | -0.487 |
| 0.8 | -1.303 | -1.295 |
| 1 | -1.611 | -1.601 |

Как видим, результаты, полученные двумя методами, практически совпадают, что является еще одним подтверждением сходимости предложенного нами метода сплайн-коллокации в двух направлениях.

Также был проведен анализ сравнения результатов с результатами, полученными в рамках двухмерной теории для различной толщины пластины. График сравнения представлен ниже:

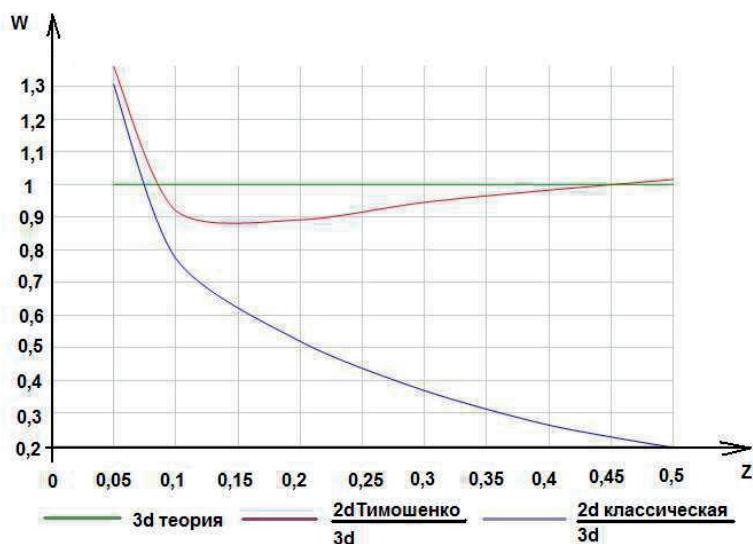


Рис.8.

Кроме того, было проведено сравнение результатов с результатами, полученными в рамках двухмерной теории рядов Тимошенко для пластины с $\nu = 0.3$, $q = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$, $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)q}$. Результаты сравнения представлены в следующей таблице:

Табл. 10

| $\frac{b}{a}$ | $W_{x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}}$ Теория рядов Тимошенко | Метод сплайн-коллокации $N = M = 10$ |
|---------------|---|--------------------------------------|
| 1 | 0.00126 | 0.001227 |
| 1.1 | 0.00150 | 0.0014078 |
| 1.2 | 0.00172 | 0.00157945 |
| 1.3 | 0.00191 | 0.0017451 |
| 1.4 | 0.00207 | 0.001921 |
| 1.5 | 0.00220 | 0.002034 |

Достаточно высокая сходимость результатов является еще одним подтверждением применимости предложенного нами метода.

Также следует отметить, что для повышения эффективности производимых расчетов воспользуемся симметрией пластины по осях x и y . Рассмотрим этот метод детальнее.

Рассмотрим толстостенную пластину с гранями $a=b=1$ и толщиной $h=0.1$. Будем учитывать условие симметрии и рассматривать задачу на $\frac{1}{4}$ области. Такой подход позволяет, оставляя неизменным время вычислений, увеличить количество точек коллокации вдвое по каждому направлению, что повышает точность полученного решения. Для определенности возьмем четверть $[x, y]: (0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{2})$. На других червертях расчеты будут проводиться аналогично, исходя из соображений симметрии. Запишем условия симметрии на гранях.

На грани $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} u_{\frac{1}{2}} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x_{\frac{1}{2}}} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x_{\frac{1}{2}}} = 0 \end{cases} \quad (4.1.37)$$

Это условие можно удовлетворить, подобрав соответствующие коэффициенты в формулах (3.4.16), (3.4.17) в виде:

$$\beta_{11}^{u_\sigma} = 0, \beta_{12}^{u_\sigma} = 1, \beta_{13}^{u_\sigma} = -4, \beta_{21}^{u_\sigma} = 1, \beta_{22}^{u_\sigma} = -\frac{1}{2}, \beta_{23}^{u_\sigma} = 1 \quad (4.1.38)$$

$$\beta_{11}^{a_\sigma} = 0, \beta_{12}^{a_\sigma} = 1, \beta_{13}^{a_\sigma} = 0, \beta_{21}^{a_\sigma} = 1, \beta_{22}^{a_\sigma} = -\frac{1}{2}, \beta_{23}^{a_\sigma} = 1, \quad a = v, w$$

Условия симметрии на грани $y = \frac{1}{2}$ имеют вид:

$$\begin{cases} v_{\frac{1}{2}} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y_{\frac{1}{2}}} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y_{\frac{1}{2}}} = 0 \end{cases} \quad (4.1.39)$$

Это условие можно удовлетворить, подобрав соответствующие коэффициенты в формулах (3.4.16), (3.4.17) в виде:

$$\beta_{11}^{v_\sigma} = 0, \beta_{12}^{v_\sigma} = 1, \beta_{13}^{v_\sigma} = -4, \beta_{21}^{v_\sigma} = 1, \beta_{22}^{v_\sigma} = -\frac{1}{2}, \beta_{23}^{v_\sigma} = 1 \quad (4.1.40)$$

$$\beta_{11}^{a_\sigma} = 0, \beta_{12}^{a_\sigma} = 1, \beta_{13}^{a_\sigma} = 0, \beta_{21}^{a_\sigma} = 1, \beta_{22}^{a_\sigma} = -\frac{1}{2}, \beta_{23}^{a_\sigma} = 1, \quad a = u, w$$

На гранях $x = 0, y = 0$ задаются условия жесткой заделки или шарнирного опирания в зависимости от постановки задачи.

4.2 Анализ напряженно-деформированного состояния изотропных прямоугольных толстостенных пластин

Проведем анализ напряженно-деформированного состояния изотропных прямоугольных толстостенных пластин для различных типов граничных условий на боковых гранях и для различной геометрии пластин.

Пусть во всех следующих случаях выполняются условия:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0. \quad (4.2.1)$$

На гранях $z = 0, \quad z = h$ граничные условия будут иметь вид:

$$\sigma_{z_0} = 1, \quad \sigma_{z_0} = \sigma_{z_0} = \sigma_{z_h} = \sigma_{z_h} = \sigma_{z_h} = 0. \quad (4.2.2)$$

Толщина пластины $h = 0.1$, коэффициент Пуассона равен $\nu = 0.3$. Модуль Юнга $E = 1$.

Данные будем представлять в обезразмеренном виде:

$$\bar{w} = \frac{w \cdot 10^4}{\sigma_{z_h}}, \quad \bar{u} = \frac{u \cdot 10^4}{\sigma_{z_h}}, \quad \bar{v} = \frac{v \cdot 10^4}{\sigma_{z_h}}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma \cdot 10^4}{\sigma_{z_h}}.$$

Рассмотрим квадратную пластину с гранями $a = b = 1$ и следующими граничными условиями:

на гранях $x = 0, \quad x = a$ – условия шарнирного опирания,

на гранях $y = 0, \quad y = b$ – жестко закреплённый контур.

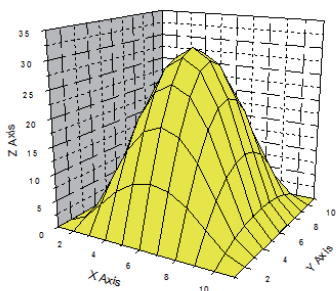
При выполнении выше описанных условий получим следующее распределение значений функции перемещения \bar{w} в Табл.11:

Табл. 11

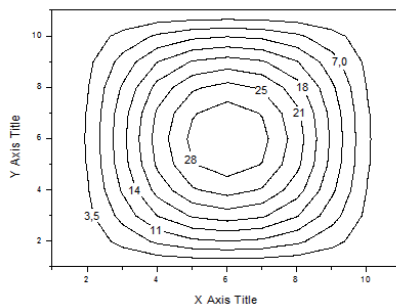
| Точки вывода | $\bar{w}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|----------|----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 30.81812 | 32.56712 | 33.05388 |
| x_2 | 31.18303 | 32.73903 | 33.21935 |
| x_3 | 30.84975 | 32.59847 | 33.08623 |
| x_4 | 1.52978 | 1.57244 | 1.59723 |
| x_5 | 1.38204 | 1.43732 | 1.47329 |
| x_6 | 1.48573 | 1.50363 | 1.52738 |
| x_7 | 18.52583 | 18.68036 | 18.72643 |
| x_8 | 18.79567 | 18.88385 | 18.94547 |
| x_9 | 18.51361 | 18.65181 | 18.70457 |
| x_{10} | 18.53947 | 18.73114 | 18.75239 |

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| x_{11} | 18.82884 | 18.93272 | 18.98463 |
| x_{12} | 18.51794 | 18.69512 | 18.73483 |
| x_{13} | 1.54708 | 1.69272 | 1.74893 |
| x_{14} | 1.39171 | 1.56991 | 1.61650 |
| x_{15} | 1.52833 | 1.65460 | 1.71772 |

Рисунок поверхности, который описывает распределение значений функции перемещения \bar{w} , представлен на рисунке:



а) общий вид



б) линии уровня

Рис.9.

Рассмотрим прямоугольную пластину с соотношением длин граней $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ и жестко закрепленным контуром. При таких условиях получим следующее распределение значений функции перемещения \bar{w} :

Табл. 12

| Точки вывода | $\bar{w}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|----------|----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 27.42064 | 27.83095 | 28.14572 |
| x_2 | 27.66072 | 27.99072 | 28.27768 |
| x_3 | 27.45630 | 27.85478 | 28.16037 |
| x_4 | 1.32783 | 1.38292 | 1.40045 |
| x_5 | 1.22547 | 1.27741 | 1.29647 |
| x_6 | 1.29742 | 1.33413 | 1.35748 |

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| x_7 | 19.22540 | 19.29739 | 19.32478 |
| x_8 | 19.34438 | 19.41389 | 19.43783 |
| x_9 | 19.19833 | 19.26367 | 19.28648 |
| x_{10} | 19.22749 | 19.29683 | 19.32961 |
| x_{11} | 19.34185 | 19.41402 | 19.13408 |
| x_{12} | 19.19583 | 19.26462 | 19.28767 |
| x_{13} | 1.33704 | 1.38199 | 1.40115 |
| x_{14} | 1.22872 | 1.27658 | 1.29853 |
| x_{15} | 1.29377 | 1.33418 | 1.35996 |

Рассмотрим прямоугольную пластину с соотношением длин граней $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ и следующими граничными условиями:

на гранях $x = a$, $y = b$ – условия шарнирного опирания,

на гранях $x = 0$, $y = 0$ – жестко закрепленный контур.

При выполнении выше описанных условий получаем следующее распределение значений функции перемещения \bar{w} :

Табл. 13

| Точки вывода | $\bar{w}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|----------|----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 48.44676 | 49.55713 | 49.88637 |
| x_2 | 48.78501 | 49.74842 | 49.92747 |
| x_3 | 48.48334 | 49.58348 | 49.89904 |
| x_4 | 1.32839 | 1.39518 | 1.42743 |
| x_5 | 1.21390 | 1.26724 | 1.29746 |
| x_6 | 1.29838 | 1.34601 | 1.39827 |
| x_7 | 25.29932 | 26.34750 | 26.97834 |
| x_8 | 25.31839 | 26.45861 | 27.08783 |
| x_9 | 25.25348 | 26.31325 | 26.96439 |
| x_{10} | 44.08239 | 44.84530 | 45.12832 |

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| x_{11} | 44.75498 | 45.17424 | 45.25834 |
| x_{12} | 44.02472 | 44.81697 | 45.09237 |
| x_{13} | 8.77382 | 9.35827 | 9.75382 |
| x_{14} | 8.85483 | 9.43951 | 9.87433 |
| x_{15} | 8.75931 | 9.30239 | 9.71382 |

Вид поверхности (общий и линии уровня), которая описывает распределение значений функции перемещения \bar{w} , представлен на *Рис.10*:

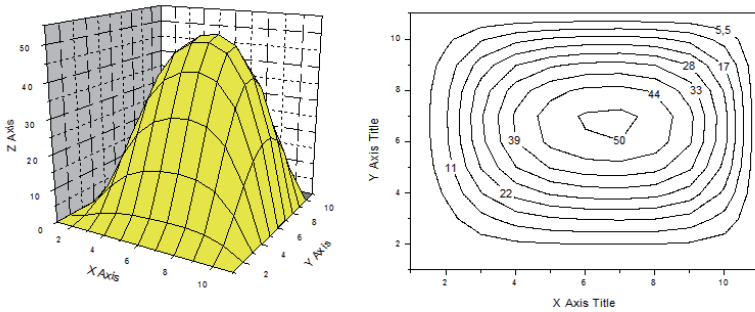


Рис.10.

Рассмотрим прямоугольную пластину с соотношением длин граней $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ и жестко закрепленным контуром.

При выполнении выше описанных условий получим следующее распределение значений функции перемещения \bar{w} :

Табл. 14

| Точки вывода | $\bar{w}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|----------|----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 33.38798 | 34.28437 | 34.80289 |
| x_2 | 33.75456 | 34.97832 | 35.03556 |
| x_3 | 33.37907 | 34.26932 | 34.76594 |
| x_4 | 3.12689 | 3.45783 | 3.56424 |
| x_5 | 3.08716 | 3.38736 | 3.44174 |

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| x_6 | 3.11965 | 3.44191 | 3.52603 |
| x_7 | 23.58767 | 24.68412 | 25.03432 |
| x_8 | 23.64385 | 24.72981 | 25.14793 |
| x_9 | 23.57044 | 24.66721 | 24.99727 |
| x_{10} | 23.58935 | 24.69056 | 25.07974 |
| x_{11} | 23.64288 | 24.71843 | 25.19041 |
| x_{12} | 23.57996 | 24.67977 | 25.04298 |
| x_{13} | 3.13005 | 3.44985 | 3.56418 |
| x_{14} | 3.09121 | 3.37908 | 3.44152 |
| x_{15} | 3.12746 | 3.45006 | 3.52607 |

Также для этого случая были посчитаны распределения значений функций перемещения \bar{u} , \bar{v} :

Табл. 15

| Точки вывода | $\bar{u}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|----------|----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 0 | 0 | 0 |
| x_2 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 0 | 0 | 0 |
| x_4 | -2.30439 | -2.32091 | -2.34817 |
| x_5 | -0.06348 | -0.04596 | -0.03118 |
| x_6 | 2.28704 | 2.29279 | 2.32684 |
| x_7 | -4.13823 | -4.17278 | -4.23372 |
| x_8 | -0.00583 | -0.00359 | -0.00172 |
| x_9 | 4.12965 | 4.16508 | 4.21728 |
| x_{10} | 4.13823 | 4.17278 | 4.23372 |
| x_{11} | 0.00583 | 0.00359 | 0.00172 |
| x_{12} | -4.12965 | -4.16508 | -4.21728 |
| x_{13} | 2.30439 | 2.32091 | 2.34817 |
| x_{14} | 0.06348 | 0.04596 | 0.03118 |

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| x_{15} | -2.28704 | -2.29279 | -2.32684 |
|----------|----------|----------|----------|

Табл. 16

| Точки вывода | $\bar{v}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|----------|----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 0 | 0 | 0 |
| x_2 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 0 | 0 | 0 |
| x_4 | -4.24632 | -4.56057 | -4.61567 |
| x_5 | -0.05829 | -0.08637 | -0.11688 |
| x_6 | 4.23019 | 4.49625 | 4.58576 |
| x_7 | -7.72947 | -7.84764 | -7.89329 |
| x_8 | -0.00412 | -0.00937 | -0.01532 |
| x_9 | 7.71902 | 7.76342 | 7.85038 |
| x_{10} | 7.72947 | 7.84764 | 7.89329 |
| x_{11} | 0.00412 | 0.00937 | 0.01532 |
| x_{12} | -7.71902 | -7.76342 | -7.85038 |
| x_{13} | 4.24632 | 4.56057 | 4.61567 |
| x_{14} | 0.05829 | 0.08637 | 0.11688 |
| x_{15} | -4.23019 | -4.49625 | -4.58576 |

Как видим, величина и характер распределения прогиба существенно зависит от геометрии пластины и типов граничных условий на боковых гранях.

Также была решена задача для изотропного куба с гранями $a = b = c = 1$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Модуль Юнга $E = 1$. Граничные условия на гранях $z = 0, z = h$:

$$\sigma_{z_0} = 1, \quad \sigma_{z_0} = \sigma_{z_0} = \sigma_{z_0} = \sigma_{z_0} = \sigma_{z_0} = 0.$$

Распределение значений функций перемещения $\bar{w}(x, y, z)$ (Табл. 15):

Табл. 17

| Точки вывода | $\bar{w}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|----------|----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 0.49163 | 0.50213 | 0.51078 |
| x_2 | 0.19643 | 0.20708 | 0.21867 |
| x_3 | 0.11124 | 0.12541 | 0.13405 |
| x_4 | 0.17107 | 0.18765 | 0.19304 |
| x_5 | 0.0244 | 0.0275 | 0.0292 |
| x_6 | 0.01504 | 0.016704 | 0.017201 |
| x_7 | 0.40548 | 0.42845 | 0.44305 |
| x_8 | 0.13601 | 0.14091 | 0.15806 |
| x_9 | 0.07680 | 0.07908 | 0.08204 |
| x_{10} | 0.40548 | 0.42845 | 0.44305 |
| x_{11} | 0.13601 | 0.14091 | 0.15806 |
| x_{12} | 0.07680 | 0.07908 | 0.08204 |
| x_{13} | 0.17107 | 0.18765 | 0.19304 |
| x_{14} | 0.0244 | 0.0275 | 0.0292 |
| x_{15} | 0.01504 | 0.016704 | 0.017201 |

Как видно из *Табл. 17*, величина прогиба существенно зависит от третьей координаты (z).

Зависимость величины прогиба от третьей координаты (z) для этого случая представлено на *Рис.11*.

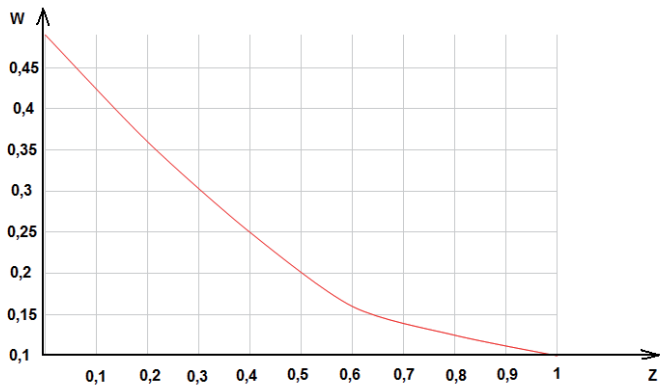


Рис.11.

Кроме того, для случая изотропного тела был проведен анализ зависимости величины прогиба от третьей координаты (z) для случая нетолстой пластины: $h=0.1$, $a=1$, $b=1$.

Результаты будут представлены в точках вывода:

$$x_i = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{i}{100} \right), \quad i = \overline{0,10}$$

Коэффициент Пуассона равен $\nu=0.3$. Модуль Юнга $E=1$. Нагрузка $\sigma_{z_0}=1$.

Результат представлен в Табл. 18

Табл. 18

| Точки вывода | $\bar{w}(x,y,z)$ |
|-----------------|------------------|
| x_1 | 17.6666 |
| x_2 | 17.7429 |
| x_3 | 17.8017 |
| x_4 | 17.8419 |
| x_5 | 17.8643 |
| x_6 | 17.8700 |
| x_7 | 17.8573 |
| x_8 | 17.8278 |
| x_9 | 17.7807 |
| x_{10} | 17.7157 |
| x_{11} | 17.6316 |

График изменения прогиба по толщине представлен на Рис. 11:

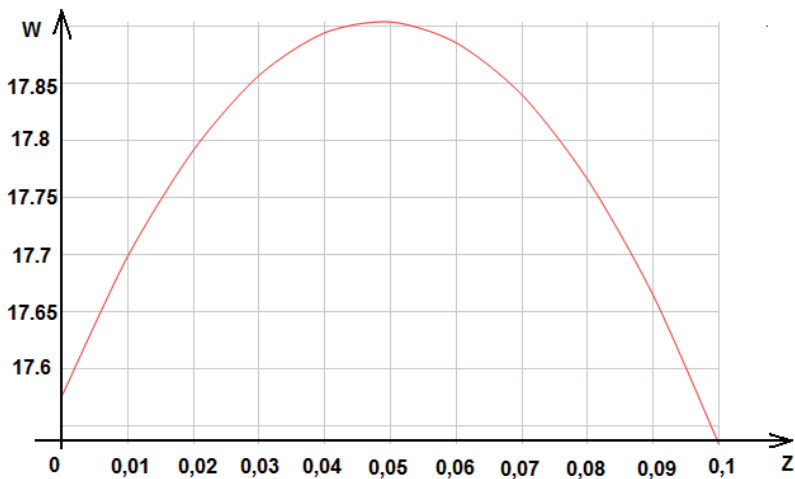


Рис. 12.

Исследуем ту же зависимость величины прогиба от третьей координаты для пластины с размерами граней $a = 2$, $b = 1$. Результат представлен в Табл. 19.

Табл. 19

| Точки вывода | $\bar{w}(x, y, z)$ |
|-----------------|--------------------|
| x_1 | 32.73779 |
| x_2 | 32.83200 |
| x_3 | 32.90396 |
| x_4 | 32.95405 |
| x_5 | 32.98247 |
| x_6 | 32.98930 |
| x_7 | 32.97547 |
| x_8 | 32.94005 |
| x_9 | 32.88296 |
| x_{10} | 32.80496 |
| x_{11} | 32.70375 |

График изменения прогиба по толщине представлен на Рис. 13:

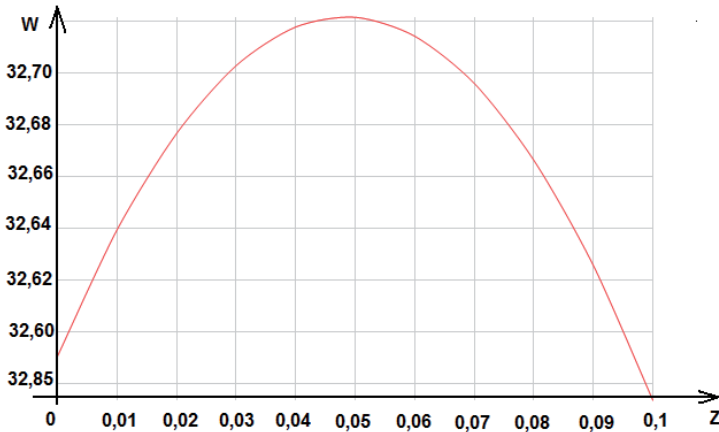


Рис.13.

Как видим, при разной геометрии пластины структура прогиба сохраняется, меняется лишь его величина.

Также был проведен подсчет компонент вектора напряжений.

Значения компонентов векторов напряжения определяются из следующих соотношений:

$$\sigma_{zy} = \sigma_{yz} = \lambda_{44} \varepsilon_{yz} = \lambda_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \lambda_{55} \varepsilon_{xz} = \lambda_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \lambda_{66} \varepsilon_{xy} = \lambda_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Тут $\alpha_{ij}, \lambda_{ij}$ определяются из соотношений (2.2.2), (2.2.5).

Задача решалась для случая пластины с параметрами:

$$a = 1, b = 1, h = 0.1, E = 1, G = 0.3846, \nu = 0.3$$

$$1) \sigma_{zz_0} = 1, \sigma_{zx_0} = \sigma_{zy_0} = \sigma_{zz_h} = \sigma_{zx_h} = \sigma_{zy_h} = 0$$

Результаты представлены в следующей таблице:

Табл. 20

| | σ_{zz} | σ_{yz} | σ_{yy} | σ_{xz} | σ_{xy} | σ_{xx} |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| x_1 | -11.35218 | 0 | -3.31852 | 0 | 0 | -3.27623 |
| x_2 | 0.49284 | 0 | 0.20919 | 0 | 0 | 0.21519 |
| x_3 | 12.34627 | 0 | 3.74070 | 0 | 0 | 3.70998 |

2) $\sigma_{zz0} = 2, \sigma_{zx0} = \sigma_{zy0} = \sigma_{zzh} = \sigma_{zxh} = \sigma_{zyh} = 0$

Результаты представлены в следующей таблице:

Табл. 21

| | σ_{zz} | σ_{yz} | σ_{yy} | σ_{xz} | σ_{xy} | σ_{xx} |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| x_1 | -22.70463 | 0 | -6.63721 | 0 | 0 | -6.55256 |
| x_2 | 0.98569 | 0 | 0.41838 | 0 | 0 | 0.43038 |
| x_3 | 24.69132 | 0 | 7.48089 | 0 | 0 | 7.41942 |

Как видим, функции напряжений линейно зависят от величины нагрузки.

Кроме того, был произведен расчет напряженно-деформированного состояния пластины для случая точечной единичной нагрузки в центре пластины.

Результат представлен ниже:

Табл. 22

| | $\bar{w}(x, y, z)$ |
|-------|--------------------|
| x_1 | 2.63874 |
| x_2 | 2.66504 |
| x_3 | 2.61363 |

График функции прогиба для этого случая:

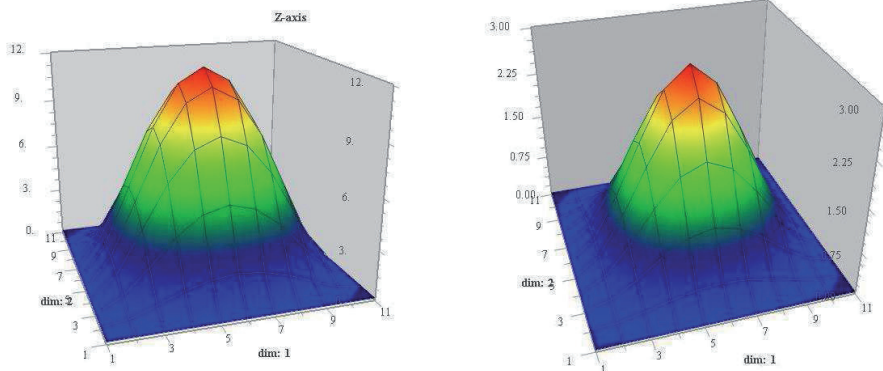


Рис.14.

Иследуем влияние интенсивности нагрузки на величину прогиба при различном типе крепления на боковых гранях.

Во всех следующих случаях возьмем компоненты интенсивности объемного внешнего напряжения $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

На гранях $z = 0$, $z = h$ граничные условия будут иметь вид:

$\sigma_{zz_0} = \sigma_a$, $\sigma_{zx_0} = \sigma_{zy_0} = \sigma_{zz_h} = \sigma_{zx_h} = \sigma_{zy_h} = 0$. Расчеты во всех следующих случаях были произведены для точек:

$$x_1 = (0.5, 0.5, 0), \quad x_2 = (0.5, 0.5, 0.05), \quad x_3 = (0.5, 0.5, 0.1)$$

Рассмотрим изотропную толстостенную пластину со следующими упругими параметрами:

$$\nu = 0.3, \quad E = 1, \quad G = 0.3846,$$

Величина боковых граней: $a = 1$, $b = 1$. Толщина пластины: $h = 0.1$. Для такой пластины были получены результаты при количестве точек коллокации, равном $M = N = 10$. Данные расчетов в дальнейшем будем приводить для количества точек дискретной ортогонализации $N_2 = 100$. Положим $\bar{w} = \frac{w \cdot 10^4}{\sigma_{zzh}}$, $\bar{u} = \frac{u \cdot 10^4}{\sigma_{zzh}}$, $\bar{v} = \frac{v \cdot 10^4}{\sigma_{zzh}}$,

$\bar{\sigma} = \frac{\sigma \cdot 10^4}{\sigma_{zzh}}$. При выполнении выше описанных условий получим следующее

распределение значений функции перемещения \bar{w} :

Случай жесткой заделки:

Табл. 23

| α | $\bar{w}(x_0, y_0, z_0)$ | | |
|----------|--------------------------|----------------|----------------|
| | $\sigma_a = 1$ | $\sigma_a = 2$ | $\sigma_a = 3$ |
| x_1 | 17.66666 | 35.33332 | 52.99998 |
| x_2 | 17.87009 | 35.73926 | 53.60936 |
| x_3 | 17.63165 | 35.26423 | 52.89589 |

Случай шарнирного опирания:

Табл. 24

| α | $\bar{w}(x_0, y_0, z_0)$ | | |
|----------|--------------------------|----------------|----------------|
| | $\sigma_a = 1$ | $\sigma_a = 2$ | $\sigma_a = 3$ |
| x_1 | 46.38327 | 92.76656 | 139.15013 |
| x_2 | 46.78518 | 93.57062 | 140.35359 |
| x_3 | 46.34785 | 92.69569 | 139.04542 |

Как видим, как в случае жесткой заделки, так и в случае шарнирного опирания величина прогиба прямо пропорционально линейно зависит от интенсивности нагрузки.

4.3 Анализ напряженно-деформированного состояния ортотропных прямоугольных толстостенных пластин

Во всех следующих случаях считаем, что компоненты интенсивности объемного внешнего напряжения $X = 0, Y = 0, Z = 0$.

На гранях $z = 0, z = h$ граничные условия будут иметь вид:

$\sigma_{zz_0} = 1, \sigma_{zx_0} = \sigma_{zy_0} = \sigma_{zz_h} = \sigma_{zx_h} = \sigma_{zy_h} = 0$. Расчеты во всех следующих случаях были произведены для точек, взятых в трех слоях по диагонали:

$$x_i = (a_i, a_i, 0.5 \cdot \left\{ \frac{i-1}{3} \right\} \cdot h), \quad a_i = 0.5, i = \overline{1,2,3}, \quad a_i = 0.1, i = \overline{4,5,6},$$

$$a_i = 0.3, i = \overline{7,8,9}, \quad a_i = 0.7, i = \overline{10,11,12}, \quad a_i = 0.9, i = \overline{13,14,15}$$

Рассмотрим толстостенную пластину, сделанную из стеклопластика.

Упругие характеристики:

$$E_x = 5.7, E_y = 1.4, E_z = 1.4, \nu_{xy} = 0.277, \nu_{yz} = 0.068, \nu_{xz} = 0.4$$

Боковые грани: $a = 1, b = 1, h = 0.1$, все боковые грани жестко закреплены. Для такой пластины были получены результаты при разном количестве точек коллокации, а

именно для $M = N = 8, M = N = 10, M = N = 12$ и при разном количестве точек

дискретной ортогонализации ($N_1 = 50, N_2 = 100, N_3 = 200$). Данные расчетов в

дальнейшем будем приводить для $N_s = 100$. Положим $\bar{w} = \frac{w \cdot 10^4}{\sigma_{zz_h}}, \bar{u} = \frac{u \cdot 10^4}{\sigma_{zz_h}}, \bar{v} = \frac{v \cdot 10^4}{\sigma_{zz_h}},$

$\bar{\sigma} = \frac{\sigma \cdot 10^4}{\sigma_{zz_h}}$. При выполнении выше описанных условий получим следующее

распределение значений функции перемещения \bar{w} :

Табл. 25

| Точки | $\bar{w}(x, y, z)$ |
|-------|--------------------|
|-------|--------------------|

| ВЫВОДА | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
|----------|---------|---------|---------|
| x_1 | 6.04283 | 6.11020 | 6.18986 |
| x_2 | 6.14932 | 6.20485 | 6.24187 |
| x_3 | 6.04817 | 6.11369 | 6.18507 |
| x_4 | 0.27985 | 0.28392 | 0.28803 |
| x_5 | 0.18219 | 0.20417 | 0.21065 |
| x_6 | 0.24625 | 0.25140 | 0.26908 |
| x_7 | 3.50072 | 3.52422 | 3.54775 |
| x_8 | 3.54971 | 3.56638 | 3.57904 |
| x_9 | 3.46726 | 3.48658 | 3.49201 |
| x_{10} | 3.50072 | 3.52422 | 3.54775 |
| x_{11} | 3.54891 | 3.56479 | 3.57872 |
| x_{12} | 3.46726 | 3.48658 | 3.49201 |
| x_{13} | 0.27985 | 0.28392 | 0.28803 |
| x_{14} | 0.18219 | 0.20417 | 0.21065 |
| x_{15} | 0.24625 | 0.25140 | 0.26908 |

Рассмотрим толстостенную пластину, сделанную из стеклопластика. Боковые грани: $a=2$, $b=1$, $h=0.1$, все боковые грани жестко закреплены. Распределение значений функции перемещения \bar{w} для такой пластины будет следующим:

Табл. 26

| Точки вывода | $\bar{w}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|----------|----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 28.01812 | 29.55655 | 30.12328 |
| x_2 | 28.72138 | 30.05652 | 30.87126 |
| x_3 | 28.00192 | 29.54052 | 30.10982 |
| x_4 | 0.53192 | 0.54013 | 0.55823 |
| x_5 | 0.37092 | 0.38495 | 0.39817 |
| x_6 | 0.51592 | 0.52717 | 0.53584 |
| x_7 | 14.75929 | 14.90057 | 15.08217 |
| x_8 | 14.87726 | 15.02594 | 15.19287 |
| x_9 | 14.72021 | 14.85650 | 15.04984 |
| x_{10} | 14.75929 | 14.90057 | 15.08217 |
| x_{11} | 14.80726 | 15.02594 | 15.19287 |
| x_{12} | 14.72021 | 14.85650 | 15.04984 |
| x_{13} | 0.53192 | 0.54013 | 0.55823 |

| | | | |
|----------|---------|---------|---------|
| x_{14} | 0.37092 | 0.38495 | 0.39817 |
| x_{15} | 0.51592 | 0.52717 | 0.53584 |

Рассмотрим толстостенную пластину, сделанную из стеклопластика.

$$a = 2, b = 1, h = 0.1.$$

На гранях $x = 0, x = a$ заданы условия шарнирного опирания, на гранях $y = 0, y = b$ – жесткой заделки.

Распределение значений функции перемещения \bar{w} для такой пластины будет следующим:

Табл. 27

| Точки вывода | $\bar{w}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|-----------|----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 38.23189 | 39.32119 | 40.21378 |
| x_2 | 38.91221 | 39.97008 | 40.92112 |
| x_3 | 23.19822 | 39.266608 | 40.18219 |
| x_4 | 1.23823 | 1.24011 | 1.24921 |
| x_5 | 1.01219 | 1.04185 | 1.06213 |
| x_6 | 1.23381 | 1.24694 | 1.25013 |
| x_7 | 21.23832 | 21.25764 | 21.26392 |
| x_8 | 21.26429 | 21.37522 | 21.38492 |
| x_9 | 21.04231 | 21.11518 | 21.20081 |
| x_{10} | 21.23832 | 21.25764 | 21.26392 |
| x_{11} | 21.26429 | 21.37522 | 21.38492 |
| x_{12} | 21.04231 | 21.11518 | 21.20081 |
| x_{13} | 1.23823 | 1.24011 | 1.24921 |
| x_{14} | 1.01219 | 1.04185 | 1.06213 |
| x_{15} | 1.23381 | 1.24694 | 1.25013 |

Рассмотрим толстостенную пластину, сделанную из стеклопластика.

Боковые грани: $a = 2, b = 1, h = 0.1$.

На гранях $x = 0, y = 0$ заданы условия шарнирного опирания, на гранях $x = a, y = b$ – жесткой заделки.

Распределение значений функции перемещения \bar{w} для такой пластины будет следующим:

Табл. 28

| Точки вывода | $\bar{w}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|--------|--------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| x_1 | 43.98127 | 44.52801 | 45.21392 |
| x_2 | 44.60213 | 45.50240 | 45.90812 |
| x_3 | 44.46127 | 45.44401 | 45.82137 |
| x_4 | 6.90133 | 6.97186 | 7.06787 |
| x_5 | 7.01823 | 7.09647 | 7.20674 |
| x_6 | 6.88027 | 6.97151 | 7.07023 |
| x_7 | 37.79108 | 38.35806 | 38.95813 |
| x_8 | 38.20437 | 38.72676 | 39.45072 |
| x_9 | 37.59346 | 38.14571 | 38.73068 |
| x_{10} | 18.27438 | 18.89278 | 19.02864 |
| x_{11} | 17.31230 | 17.98994 | 18.18632 |
| x_{12} | 16.43292 | 16.91975 | 17.39051 |
| x_{13} | 0.47732 | 0.48242 | 0.48708 |
| x_{14} | 0.31902 | 0.32677 | 0.33105 |
| x_{15} | 0.48203 | 0.48983 | 0.49237 |

Рассмотрим толстостенную пластину, сделанную из дуба.

Упругие характеристики (после обезразмеривания):

$$E_x = 5.82, E_y = 2.18, E_z = 0.98, \nu_{xy} = 0.320, \nu_{yz} = 0.288, \nu_{xz} = 0.120$$

$a=1, b=1, h=0.1$, все боковые грани жестко закреплены. Распределение значений функции перемещения \bar{w} для такой пластины будет следующим:

Табл. 29

| Точки вывода | $\bar{w}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|----------|----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 46.63289 | 47.12296 | 47.73228 |
| x_2 | 47.25012 | 47.74606 | 48.23928 |
| x_3 | 46.38278 | 46.77659 | 47.38239 |
| x_4 | 2.48018 | 2.56541 | 2.61293 |
| x_5 | 1.50793 | 1.55692 | 1.58021 |
| x_6 | 2.03704 | 2.10654 | 2.14238 |
| x_7 | 27.13372 | 27.90084 | 28.52138 |
| x_8 | 27.95218 | 28.43563 | 28.99716 |
| x_9 | 26.92139 | 27.51337 | 28.13712 |
| x_{10} | 27.13372 | 27.90084 | 28.52138 |
| x_{11} | 27.95218 | 28.43563 | 28.99716 |
| x_{12} | 26.92139 | 27.51337 | 28.13712 |
| x_{13} | 2.48018 | 2.56541 | 2.61293 |
| x_{14} | 1.50793 | 1.55692 | 1.58021 |

| | | | |
|----------|---------|---------|---------|
| x_{15} | 2.03704 | 2.10654 | 2.14238 |
|----------|---------|---------|---------|

Рассмотрим толстостенную пластину, сделанную из сосны.

Упругие характеристики:

$$E_x = 16.6, E_y = 1.12, E_z = 0.58, \nu_{xy} = 0.420, \nu_{zy} = 0.028, \nu_{xz} = 0.352$$

Боковые грани: $a=2, b=1, h=0.1$, все боковые грани жестко закреплены.

Распределение значений функции перемещения \bar{w} для такой пластины будет следующим:

Табл. 30

| Точки вывода | $\bar{w}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|-----------|-----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 270.23089 | 272.44274 | 273.32789 |
| x_2 | 271.90123 | 273.85475 | 274.32479 |
| x_3 | 269.32921 | 271.33357 | 272.42147 |
| x_4 | 12.13239 | 12.20111 | 12.25189 |
| x_5 | 10.11340 | 10.19428 | 10.23347 |
| x_6 | 10.62832 | 10.72222 | 10.80934 |
| x_7 | 153.92388 | 154.79502 | 155.01123 |
| x_8 | 154.19218 | 155.26899 | 155.72118 |
| x_9 | 151.98272 | 153.75523 | 153.97243 |
| x_{10} | 153.92386 | 154.79504 | 155.01122 |
| x_{11} | 154.19217 | 155.26900 | 155.72118 |
| x_{12} | 151.98273 | 153.75523 | 153.97244 |
| x_{13} | 12.13240 | 12.20113 | 12.25188 |
| x_{14} | 10.11341 | 10.19427 | 10.23348 |
| x_{15} | 10.62832 | 10.72223 | 10.80937 |

Распределение значений функции перемещения u для этого случая:

Табл. 31

| Точки вывода | $\bar{u}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|----------|----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 0 | 0 | 0 |
| x_2 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 0 | 0 | 0 |
| x_4 | -2.81120 | -2.85156 | -2.88712 |
| x_5 | -0.00513 | -0.00620 | -0.00671 |
| x_6 | 2.78129 | 2.83877 | 2.86019 |
| x_7 | -9.44910 | -9.47147 | -9.49213 |
| x_8 | -0.01693 | -0.01860 | -0.01908 |

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| x_9 | 9.41807 | 9.45134 | 9.47284 |
| x_{10} | 9.44910 | 9.47147 | 9.49213 |
| x_{11} | 0.01693 | 0.01860 | 0.01908 |
| x_{12} | -9.41807 | -9.45134 | -9.47284 |
| x_{13} | 2.81120 | 2.85156 | 2.88712 |
| x_{14} | 0.00513 | 0.00620 | 0.00671 |
| x_{15} | -2.78129 | -2.83877 | -2.86019 |

Распределение значений функции перемещения v для этого случая:

Табл. 32

| Точки вывода | $\bar{v}(x, y, z)$ | | |
|-----------------|--------------------|-----------|-----------|
| | N,M=8 | N,M=10 | N,M=12 |
| x_1 | 0 | 0 | 0 |
| x_2 | 0 | 0 | 0 |
| x_3 | 0 | 0 | 0 |
| x_4 | -7.81210 | -7.85528 | -7.87193 |
| x_5 | 0.04081 | 0.04371 | 0.04582 |
| x_6 | 7.73803 | 7.76619 | 7.78826 |
| x_7 | -25.04875 | -25.10972 | -25.12328 |
| x_8 | -0.07194 | -0.08915 | -0.09013 |
| x_9 | 24.93749 | 24.97367 | 24.99139 |
| x_{10} | 25.04875 | 25.10972 | 25.12328 |
| x_{11} | 0.07194 | 0.08915 | 0.09013 |
| x_{12} | -24.93749 | -24.97367 | -24.99139 |
| x_{13} | 7.81210 | 7.85528 | 7.87193 |
| x_{14} | -0.04081 | -0.043715 | -0.04582 |
| x_{15} | -7.73803 | -7.76619 | -7.78826 |

Нулевые значения функций \bar{u} и \bar{v} в точках x_1, x_2, x_3 указывают на то, что функция $\bar{u}(x, y, z)$ антисимметрична относительно оси x и симметрична относительно оси y . Функция $\bar{v}(x, y, z)$ антисимметрична относительно оси y и симметрична относительно оси x .

Как видим, в случае ортотропного тела, также как и в случае изотропного, величина и геометрия прогиба существенно зависит от геометрии пластины и типов граничных условий на боковых гранях.

Также проведем сравнительный анализ величины прогиба для разного типа материала при одинаковой геометрии пластины и одинаковых граничных условиях.

Рассмотрим толстостенные пластины, сделанные из сосны и стеклопластика. Боковые грани: $a=2, b=1, h=0.1, \sigma_{z0}=1$, все боковые грани жестко закреплены. Сравнение прогибов представлено в Табл. 33.

Табл. 33

| Точки вывода | $\bar{w}(x, y, z)$ | |
|--------------|--------------------|-------------------------|
| | Сосна N,M=10 | Стеклопластик N,M=10 |
| x_1 | 272.44274 | 29.55655 |
| x_2 | 273.85475 | 30.05652 |
| x_3 | 271.33357 | 29.54052 |
| x_4 | 12.20111 | 0.54013 |
| x_5 | 10.19428 | 0.38495 |
| x_6 | 10.72222 | 0.52717 |
| x_7 | 154.79502 | 14.90057 |
| x_8 | 155.26899 | 15.02594 |
| x_9 | 153.75523 | 14.85650 |
| x_{10} | 154.79504 | 14.90057 |
| x_{11} | 155.26900 | 15.02594 |
| x_{12} | 153.75523 | 14.85650 |
| x_{13} | 12.20113 | 0.54013 |
| x_{14} | 10.19427 | 0.38495 |
| x_{15} | 10.72223 | 0.52717 |

Как видно из Табл. 33., тип материала значительно влияет на величину прогиба.

4.4 Анализ напряженно-деформированного состояния анизотропных прямоугольных толстостенных пластин с одной плоскостью упругой симметрии

Были получены результаты для случая шарнирного опирания и жесткой заделки. Пусть грани пластины $a=b=1$, толщина – $h=0.1, X=0, Y=0, Z=0$.

Материал, из которого сделана пластина – стеклопластик, СТЭТ. Его упругие характеристики (после обезразмеривания):

$$E_x = 0.359 \cdot 10^6, E_y = 0.293 \cdot 10^6, E_z = 0,183 \cdot 10^6, G_{xy} = 0.076 \cdot 10^6, \\ G_{zx} = 0.066 \cdot 10^6, G_{yz} = 0.063 \cdot 10^6, \nu_{xy} = 0.177, \nu_{yz} = 0.371, \nu_{zx} = 0.157$$

Данные будем представлять в обезразмеренном виде:

$$\bar{w} = \frac{w \cdot 10^4}{\sigma_{zzh}}, \bar{u} = \frac{u \cdot 10^4}{\sigma_{zzh}}, \bar{v} = \frac{v \cdot 10^4}{\sigma_{zzh}}, \bar{\sigma} = \frac{\sigma \cdot 10^4}{\sigma_{zzh}}.$$

На гранях $z = 0, z = h$ граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{zz_0} = 1, \sigma_{zx_0} = \sigma_{zy_0} = \sigma_{zz_h} = \sigma_{zx_h} = \sigma_{zy_h} = 0$$

На гранях $x = 0, y = 0, x = 1, y = 1$ задаются условия: в первом случае – жесткой заделки, во втором – шарнирного опирания.

Сравнение результатов в точке максимального прогиба из серединной плоскости $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})$ при заданных таким образом параметрах и различных углах поворота представлены ниже:

Табл. 34

| α | $\bar{w}(x_0, y_0, z_0)$ | |
|----------|--------------------------|-----------|
| | Жесткая заделка | Шарнир |
| 0 | 71.72219 | 185.99822 |
| 1 | 71.72220 | 185.99962 |
| 15 | 72.10897 | 191.71531 |
| 30 | 73.18470 | 205.84760 |
| 45 | 73.67566 | 210.02677 |
| 60 | 73.18470 | 205.84760 |
| 75 | 72.10897 | 191.71531 |
| 89 | 71.72220 | 185.99962 |
| 90 | 71.72219 | 185.99822 |

Количество точек коллокации в этом и всех последующих случаях бралось равным 10, количество точек ортогонализации – 100. Как видно из полученных результатов функция прогиба – симметрична и достигает своего максимума при $\alpha = 45$. Также при α , близком к нулю и девяноста градусам, когда тело имеет свойства, близкие к ортотропным, видим существенную сходимость результатов,

что еще раз подтверждает сходимость метода. Также из *Табл. 34* следует, что при шарнирном опирании прогиб получается больше, чем при жесткой заделке.

Так же в случае жесткой заделки были проведены расчеты для пластины с боковыми гранями $a=1, b=2$ и толщиной: а) $h=0.1$, б) $h=0.05$.

Табл. 35

| α | $\bar{w}(x_0, y_0, z_0)$ | |
|----------|--------------------------|--------------------|
| | $a=1, b=2, h=0.1$ | $a=1, b=2, h=0.05$ |
| 0 | 120.734239 | 671.60538 |
| 1 | 120.74464 | 671.63517 |
| 15 | 124.04376 | 678.55058 |
| 30 | 132.13894 | 692.80478 |
| 45 | 140.28923 | 702.98037 |
| 60 | 143.55473 | 704.17051 |
| 75 | 141.88651 | 698.17051 |
| 89 | 140.25664 | 680.22815 |
| 90 | 140.24704 | 680.21236 |

Как видно из *Табл. 35*, симметрии функции прогиба в данном случае уже не наблюдается, что объяснимо несимметричной геометрией пластины. Так же следует заметить, что при увеличении длин боковых граней пластины x, y при постоянной толщине прогиб увеличивается. И наоборот: при увеличении толщины пластины при одинаковой длине боковых граней прогиб уменьшается. Отсюда можно сделать вывод, что величина прогиба существенно зависит от геометрии пластины.

Кроме того, был проведен сравнительный анализ значений функции прогиба w в точках $p_1(0.3, 0.3, \frac{h}{2})$, $p_2(0.3, 0.7, \frac{h}{2})$, $p_3(0.7, 0.7, \frac{h}{2})$, $p_4(0.7, 0.3, \frac{h}{2})$ при $h=0.1$ для случаев жесткой заделки (*Табл. 36*) и шарнирного опирания (*Табл. 37*).

Табл. 36

| α | $\bar{w}(x_0, y_0, z_0)$ | | | |
|----------|--------------------------|----------|----------|----------|
| | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 |
| 0 | 41.77319 | 41.77319 | 41.77319 | 41.77319 |
| 1 | 41.75035 | 41.80075 | 41.75035 | 41.80075 |
| 15 | 41.85154 | 42.58949 | 41.85154 | 42.58949 |
| 30 | 42.43625 | 43.75318 | 42.43625 | 43.75318 |

| | | | | |
|----|----------|----------|----------|----------|
| 45 | 42.76678 | 44.30446 | 42.76678 | 44.30446 |
| 60 | 42.43625 | 43.75318 | 42.43625 | 43.75318 |
| 75 | 41.85154 | 42.58949 | 41.85154 | 42.58949 |
| 89 | 41.75035 | 41.80075 | 41.75035 | 41.80075 |
| 90 | 41.77319 | 41.77319 | 41.77319 | 41.77319 |

Табл. 37

| α | $\overline{w}(x_0, y_0, z_0)$ | | | |
|----------|-------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 |
| 0 | 124.39925 | 124.39925 | 124.39925 | 124.39925 |
| 1 | 127.54724 | 127.66977 | 127.54724 | 127.66977 |
| 15 | 131.14083 | 132.78302 | 131.14083 | 132.78302 |
| 30 | 139.91008 | 141.13788 | 139.91008 | 141.13788 |
| 45 | 142.23420 | 143.93797 | 142.23420 | 143.93797 |
| 60 | 139.91008 | 141.13788 | 139.91008 | 141.13788 |
| 75 | 131.14083 | 132.78302 | 131.14083 | 132.78302 |
| 89 | 127.54724 | 127.66977 | 127.54724 | 127.66977 |
| 90 | 124.39925 | 124.39925 | 124.39925 | 124.39925 |

Как видно из полученных результатов, функция прогиба в каждом из случаев для каждой из выбранных точек – симметрична и достигает своего максимума при $\alpha = 45$. Графики функций прогиба в точках p_1, p_2, p_3, p_4 , соответствующие значениям из Табл.36 представлены на Рис. 15.

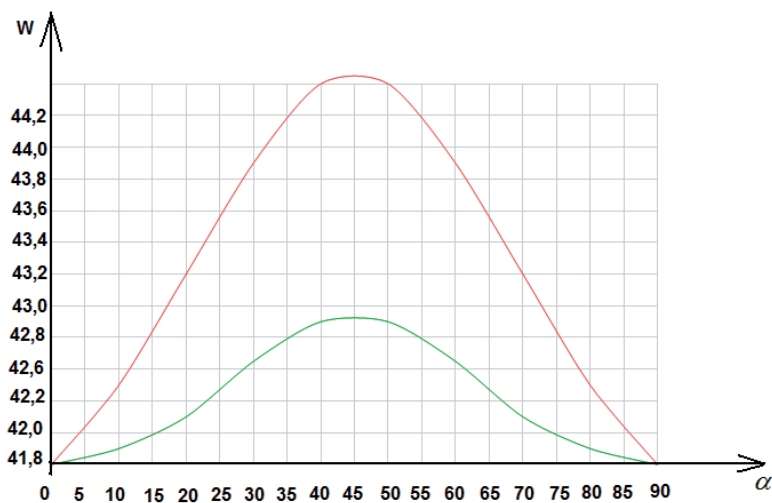


Рис.15.

Из *Рис. 15* видно, что функция прогиба пластины как функция угла поворота α симметрична относительно 45 градусов.

Таким образом, предложенный численно-аналитический метод представляет собой эффективный алгоритм для исследования напряженно-деформированного состояния анизотропных толстостенных пластин с одной плоскостью упругой симметрии.

Выводы

В разделе 4 на основе разработанного подхода получены такие результаты:

1. Достоверность полученных в работе результатов достигается использованием обоснованной математической модели теории пластин, корректностью формулировки задачи, тестированием разработанного подхода на ряде задач данного класса и контролем точности на основе индуктивных оценок.
2. Получены решения ряда задач и проведен анализ напряженно деформированного состояния изотропных, ортотропных, анизотропных с одной плоскостью упругой симметрии и функционально-градиентных пластин при разных видах закрепления краев и нагрузки, геометрических характеристиках пластины.
3. Исследовано влияние толщины оболочки, интенсивности нагрузки, типа граничных условий на напряженное состояние пластины.
4. Исследована сходимость результатов при различном количестве точек коллокации и дискретной ортогонализации.
5. Представлен пример расчета значений компонент векторов напряжения

Раздел 5. Расчет напряженно-деформированного состояния конечноэлементной композитной анизотропной области с различными граничными условиями на поверхности

5.1 Исходные соотношения

Обозначим через K анизотропную пластину, состоящую из объединения кубических пластин (рис. 17):

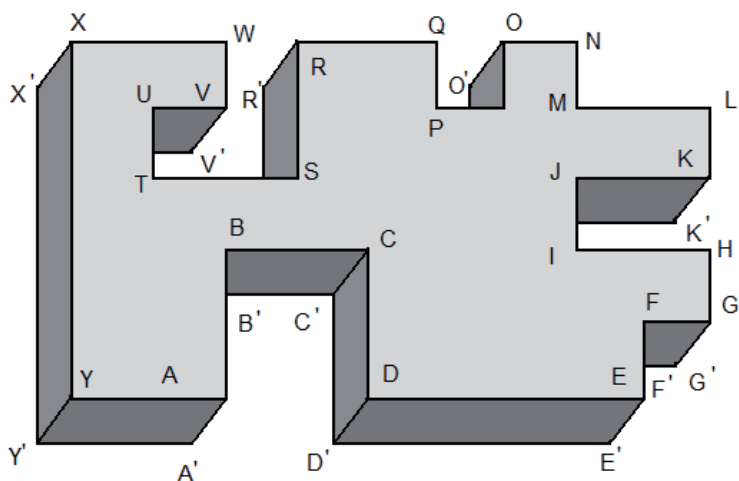


Рис. 17

Будем рассматривать задачу про напряженно-деформированное состояние такой пластины постоянной толщины в прямоугольной системе координат (X, Y, Z) . Соответственно линейной теории упругости исходные уравнения будут иметь следующий вид:

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (5.1.1)$$

где σ_{ij} удовлетворяют закон парности касательных напряжений:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}; \sigma_{xz} = \sigma_{zx}; \sigma_{yz} = \sigma_{zy};$$

Соотношения Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (5.1.2)$$

Физические уравнения, что выражают закон Гука для анизотропного материала:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{zz} + \alpha_{14}\sigma_{xy} + \alpha_{15}\sigma_{yz} + \alpha_{16}\sigma_{xz} \\ \varepsilon_y = \alpha_{12}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{zz} + \alpha_{24}\sigma_{xy} + \alpha_{25}\sigma_{yz} + \alpha_{26}\sigma_{xz} \\ \varepsilon_z = \alpha_{13}\sigma_{xx} + \alpha_{23}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{zz} + \alpha_{34}\sigma_{xy} + \alpha_{35}\sigma_{yz} + \alpha_{36}\sigma_{xz} \\ \varepsilon_{xy} = \alpha_{14}\sigma_{xx} + \alpha_{24}\sigma_{yy} + \alpha_{34}\sigma_{zz} + \alpha_{44}\sigma_{xy} + \alpha_{45}\sigma_{yz} + \alpha_{46}\sigma_{xz} \\ \varepsilon_{yz} = \alpha_{15}\sigma_{xx} + \alpha_{25}\sigma_{yy} + \alpha_{35}\sigma_{zz} + \alpha_{45}\sigma_{xy} + \alpha_{55}\sigma_{yz} + \alpha_{56}\sigma_{xz} \\ \varepsilon_{xz} = \alpha_{16}\sigma_{xx} + \alpha_{26}\sigma_{yy} + \alpha_{36}\sigma_{zz} + \alpha_{46}\sigma_{xy} + \alpha_{56}\sigma_{yz} + \alpha_{66}\sigma_{xz} \end{cases} \quad (5.1.3)$$

Как видим, в соотношении (5.1.3) присутствует двадцать одна независимая постоянная. На практике как правило рассматривают тела, для каждой точки которых существует одна плоскость упругой симметрии, касательная к координатной поверхности $z = const$. В этом случае количество независимых переменных становится равной тринадцати, и закон Гука для таких тел примет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{zz} + \alpha_{14}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_y = \alpha_{12}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{zz} + \alpha_{24}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_z = \alpha_{13}\sigma_{xx} + \alpha_{23}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{zz} + \alpha_{34}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_{xy} = \alpha_{14}\sigma_{xx} + \alpha_{24}\sigma_{yy} + \alpha_{34}\sigma_{zz} + \alpha_{44}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yz} = \alpha_{55}\sigma_{yz} + \alpha_{56}\sigma_{xz} \\ \varepsilon_{xz} = \alpha_{56}\sigma_{yz} + \alpha_{66}\sigma_{xz} \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Коэффициенты α_{ij} этой системы определяются из соотношений:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{1}{E_x}, \quad \alpha_{12} = -\frac{\nu_{yx}}{E_x} = -\frac{\nu_{xy}}{E_y}, \quad \alpha_{13} = -\frac{\nu_{xz}}{E_z} = -\frac{\nu_{zx}}{E_x}, \quad \alpha_{14} = -\frac{\eta_{xy,x}}{E_x} = -\frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{E_y}, \\
\alpha_{23} &= -\frac{\nu_{zy}}{E_y} = -\frac{\nu_{yz}}{E_z}, \quad \alpha_{24} = -\frac{\eta_{xy,y}}{E_y} = -\frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}}, \quad \alpha_{33} = \frac{1}{E_z}, \quad \alpha_{34} = -\frac{\eta_{xy,z}}{E_z} = -\frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}}, \quad (5.1.5) \\
\alpha_{44} &= \frac{1}{G_{xy}}, \quad \alpha_{55} = \frac{1}{G_{yz}}, \quad \alpha_{56} = -\frac{\mu_{zx,yz}}{G_{yz}} = -\frac{\mu_{yz,zx}}{G_{xz}}, \quad \alpha_{66} = \frac{1}{G_{xz}}.
\end{aligned}$$

В этих определениях:

E_x, E_y, E_z – модули упругости по направлениям x, y, z соответственно;
 G_{yz}, G_{xz}, G_{xy} – модули сдвига для плоскостей, параллельных координатным плоскостям $x = const, y = const, z = const$ соответственно; $\nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}, \nu_{yx}$ – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие при растяжении вдоль осей координат; $\mu_{zx,yz}, \mu_{yz,zx}$ – коэффициенты, которые характеризуют сдвиги в плоскостях, параллельных координатным плоскостям, обусловленные касательными напряжениями, которые действуют в плоскостях, касательных к другим координатным плоскостям; $\eta_{xy,x}, \eta_{xy,y}, \eta_{xy,z}$ – коэффициенты взаимного влияния, которые характеризуют сдвиги в координатных плоскостях, обусловленные нормальными напряжениями; $\eta_{x,xy}, \eta_{y,xy}, \eta_{z,xy}$ – коэффициенты взаимного влияния, которые характеризуют удлинения, обусловленные касательными напряжениями.

Далее из систем (5.1.1),(5.1.2),(5.1.4) путем элементарных преобразований получаем разрешающую систему трех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, описывающую напряженно-деформированное состояние пластины:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} a_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} a_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} a_3 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} a_4 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} a_5 + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} a_6 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} a_7 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} a_8 + a_9 X + a_{10} Y \\
\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} b_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} b_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} b_3 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} b_4 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} b_5 + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} b_6 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} b_7 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} b_8 + b_9 X + b_{10} Y
\end{aligned} \quad (5.1.6)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + c_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + c_4 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + c_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_7 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c_8 Z$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i в системе (5.1.6) определяются механическими характеристиками материала с учетом соотношений (5.1.5).

На практике формулы для анизотропного тела с одной плоскостью упругой симметрии получаются из формул для ортотропного тела путем поворота системы координат на угол α вокруг оси OZ .

При этом коэффициенты матриц упругой податливости a_{ij} и a'_{ij} в обоих случаях связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \cos^4 \alpha a_{11} + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha a_{12} + \sin^4 \alpha a_{22} + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha a_{66} \\ a'_{22} &= \sin^4 \alpha a_{11} + \cos^4 \alpha a_{22} + a_{66} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2 a_{12} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ a'_{33} &= a_{33} \\ a'_{44} &= a_{44} \cos^2 \alpha + a_{55} \sin^2 \alpha \\ a'_{55} &= a_{44} \sin^2 \alpha + a_{55} \cos^2 \alpha \\ a'_{66} &= (a_{11} + a_{22} - 2a_{12}) 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + a_{66} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 \\ a'_{12} &= (a_{11} + a_{22} - a_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a_{12} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ a'_{13} &= a_{13} \cos^2 \alpha + a_{23} \sin^2 \alpha \\ a'_{14} &= 0 \\ a'_{15} &= 0 \\ a'_{16} &= [2(a_{22} \sin^2 \alpha - a_{11} \cos^2 \alpha) + (a_{66} + 2a_{12})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha \\ a'_{23} &= a_{13} \sin^2 \alpha + a_{23} \cos^2 \alpha \\ a'_{24} &= 0 \\ a'_{25} &= 0 \\ a'_{26} &= [2(a_{22} \cos^2 \alpha - a_{11} \sin^2 \alpha) - (a_{66} + 2a_{12})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha \\ a'_{34} &= 0 \\ a'_{35} &= 0 \\ a'_{36} &= 2(a_{23} - a_{13}) \sin \alpha \cos \alpha \\ a'_{45} &= (a_{44} - a_{55}) \sin \alpha \cos \alpha \\ a'_{46} &= 0 \\ a'_{56} &= 0 \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

α , Таким образом, зная коэффициенты a_{ij} в случае ортотропного тела и угол поворота можем сформулировать корректно поставленную задачу для анизотропного тела с одной плоскостью упругой симметрии.

Решение системы (5.1.6) будем искать в виде (5.1.8):

$$\begin{cases} u(x, y, z) = \sum_{i=1..K \times (N+1) \times (M+1)} u_i(z) \varphi_i^u(x) \psi_i^u(y) \\ v(x, y, z) = \sum_{i=1..K \times (N+1) \times (M+1)} v_i(z) \varphi_i^v(x) \psi_i^v(y) \\ w(x, y, z) = \sum_{i=1..K \times (N+1) \times (M+1)} w_i(z) \varphi_i^w(x) \psi_i^w(y) \end{cases} \quad (5.1.8)$$

Тут: N, M - размерность сетки коллокации каждой из кубических пластин. K - количество кубических подпластин пластины [1].

Постановка граничных условий для системы (5.1.6) происходит аналогично методу, описаному в разделе (3.4)

5.2 Случай неоднородного ортотропного материала

В случае неоднородного по координате z ортотропного материала жесткостные параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние такой пластины, примут вид:

$E_x(z), E_y(z), E_z(z)$ – модули упругости по направлениям x, y, z соответственно.

$G_{yz}(z), G_{xz}(z), G_{xy}(z)$ – модули упругости для плоскостей, параллельных плоскостям $x=0, y=0, z=0$ соответственно.

В этом случае коэффициенты матрицы упругой податливости примут вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{11}(z); & \alpha_{22} &= \alpha_{22}(z); & \alpha_{33} &= \alpha_{33}(z); \\ \alpha_{12} &= \alpha_{12}(z); & \alpha_{13} &= \alpha_{13}(z); & \alpha_{23} &= \alpha_{23}(z); \\ \alpha_{44} &= \alpha_{44}(z); & \alpha_{55} &= \alpha_{55}(z); & \alpha_{66} &= \alpha_{66}(z); \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Тогда имеем систему трех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, что описывает напряженно-деформированное состояние

прямоугольной толстостенной ортотропной неоднородной по координате z пластины:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a_1(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2(z) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_3(z) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a_4(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + a_5(z) X \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = b_1(z) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_2(z) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_3(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_4(z) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + b_5(z) Y \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = c_1(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_2(z) \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + c_3(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_4(z) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_5(z) Z \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Коэффициенты $a_i(z), b_i(z), c_i(z), i = \overline{1..5}$ определяются через коэффициенты матрицы упругой податливости $\alpha_{ij}(z)$, описанные формулами (5.2.1).

В случае материала, неоднородного по трем пространственным координатам, коэффициенты системы (5.2.2) будут коэффициентами от всех трех пространственных координат: $a_i(x, y, z), b_i(x, y, z), c_i(x, y, z), i = \overline{1..5}$.

5.3 Постановка задачи

Рассмотрим односвязное тело произвольной формы с произвольным креплением на частях поверхности. Обозначим его T . Будем рассматривать его в декартовой системе координат XYZ . Задача стоит в нахождении НДС данного тела, состоящего из произвольной композиции материалов с произвольным креплением поверхности при произвольной нагрузке на неё (равномерной или точечной) и произвольно заданных объемных сил (массовых, температурного расширения и т.п.).

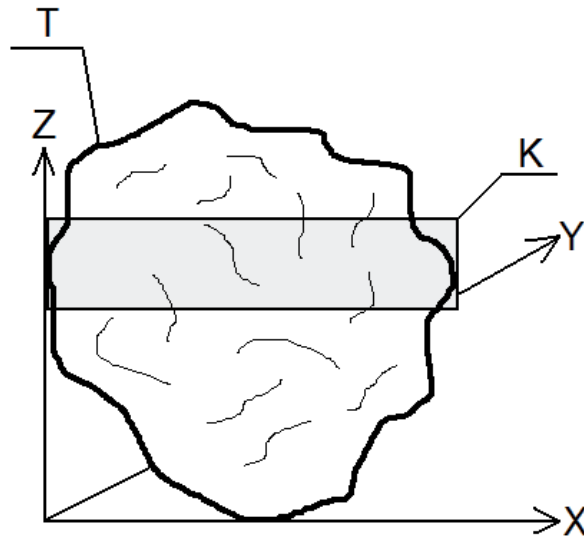


Рис.18

5.4 Метод решения

Расположим рассматриваемое тело T в декартовой системе координат таким образом, чтобы плоскости XOY , XOZ , YOZ были касательными к телу, а каждая точка тела $p(x_p, y_p, z_p)$ удовлетворяла условию: $x_p \geq 0, y_p \geq 0, z_p \geq 0$ [рис. 18]. Рассмотрим случай композитного слоистого тела. Разобьем тело на горизонтальные слои, нижняя и верхняя грани которых будут параллельны плоскости XOY . Каждый из таких слоёв аппроксимируем кубическими подпластинами [рис. 17]. НДС полученной таким образом области K будет описываться формулами (5.1.6), (3.4.2), (3.4.18), (3.4.26). Граничные условия на стыке областей K_i будут задаваться соотношениями (5.4.1):

$$\sigma_{i_z} = -\sigma_{i+1_z}, \quad u_i = u_{i+1}, \quad \sigma_{i_{xy}} = \sigma_{i+1_{xy}}, \quad v_i = v_{i+1}, \quad \sigma_{i_{xz}} = \sigma_{i+1_{xz}}, \quad w_i = -w_{i+1} \quad (5.4.1)$$

После проведения аппроксимации искомых функций перемещений в виде (5.1.8) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений прядка:

$$\dim A = 6 \sum_{i=1}^R K_i (N+1)(M+1) \quad (5.4.2)$$

Тут: R – количество слоев односвязного тела T , K_i - количество кубических подпластин в i -ом слое, N, M - количество точек сплайн-коллокации по каждому из направлений. Эта задача может быть решена устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [1].

Выводы

В разделе 5 на основе разработанного подхода получены такие результаты:

1. Разработан метод расчета напряженно-деформированного состояния конечноэлементной композитной анизотропной области с различными граничными условиями на поверхности.
2. Достоверность предложенного метода достигается использованием обоснованной математической модели теории упругости для случая композитных областей произвольной формы, корректностью формулировки задачи.
3. Получены результаты для случая неоднородного ортотропного материала.

ВЫВОДЫ

В данной книге разработан эффективный подход к решению трехмерных задач статики анизотропных с одной плоскостью упругой симметрии прямоугольных толстостенных пластин при разных граничных условиях, который базируется на применении метода сплайн-колокации в двух координатных направлениях для сведения трехмерной краевой задачи к одномерной и решению последней устойчивым численным методом дискретной ортогонализации. Проведен анализ влияния толщины пластины, типа граничных условий на боковых гранях и интенсивности нагрузки на напряженное состояние пластины, в результате которого обнаружен ряд закономерностей распределения полей перемещений и напряжений, которые имеют практическое значение при оценке прочности и надежности элементов конструкций.

При этом получены такие конкретные результаты:

1. На основе соотношений теории упругости выведена разрешающая система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в перемещениях, которая описывает напряженно-деформированное состояние анизотропных с одной плоскостью упругой симметрии толстостенных прямоугольных пластин.
2. Разработана методика расчета анизотропных с одной плоскостью упругой симметрии пластин, которая заключается в использовании метода сплайн-колокации в двух направлениях для сведения трехмерной краевой задачи к одномерной и решению полученной одномерной задачи устойчивым численным методом дискретной ортогонализации при точном удовлетворении граничных условий на боковых гранях пластины.
3. Предложенный подход реализован в вычислительном комплексе на ПК, с помощью которого можно проводить расчеты многовариантных задач данного класса при разных видах анизотропии, нагрузки, граничных условий на боковых гранях пластины, геометрических характеристиках пластин.

4. Достоверность полученных в работе результатов достигается использованием обоснованной математической модели теории пластин, корректностью формулировки задачи, тестированием разработанного подхода на ряде задач данного класса и контролем точности на основе индуктивных оценок.
5. На основе предложенного подхода получены решения ряда задач и проведен анализ напряженного состояния изотропных, ортотропных, анизотропных с одной плоскостью упругой симметрии прямоугольных толстостенных пластин при различных граничных условиях на боковых гранях, при различной интенсивности нагрузки и толщине пластины. Также провен анализ влияния интенсивности нагрузки, толщины пластины и типа граничных условий на напряженное состояние пластины. Исследована сходимость результатов при различном количестве точек коллокации и дискретной ортогонализации. Обнаруженные эффекты и закономерности представлены на графиках и в таблицах.
6. Разработанный на базе предложенного подхода алгоритм, вычислительный комплекс для ПК и полученные в работе результаты могут быть использованы в научно-исследовательских организациях для оценки прочности и деформативности элементов конструкций, которые имеют форму прямоугольных толстостенных пластин.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Розв'язання тривимірних крайових задач про згин прямокутних пластин / Григоренко О.Я., Бергульов А.С., Яремченко // Доповіді Національної академії наук України. – 2010. – №10 – С.44-51.
2. О напряженно-деформированном состоянии ортотропных толстостенных прямоугольных пластин / Григоренко О.Я., Бергульов А.С., Яремченко С.М. // Доповіді Національної академії наук України. – 2011. – №9 – С.49-55.
3. Розрахунок напружено-деформованого стану прямокутних анізотропних пластин в просторовій постановці / Григоренко О.Я., Бергульов А.С. // Вісник Київського Національного Університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2011. – №4.
4. Григоренко А.Я., Бергульов А.С. Определение напряженного состояния прямоугольных анизотропных пластин в пространственной постановке // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2011. – 54, № 4. – С. 131-137.
5. Об одном подходе к решению задач о свободных колебаниях пологих оболочек переменной толщины на основе сплайн-аппроксимации / А.Я.Григоренко, А.С.Бергулев, Д.В.Бубенко. // International Conference Mathematic Dnepropetrovsk-Dneprodzerhinsk, Ukraine, 2008, P.90.
6. Решение задач о напряженно-деформированном состоянии прямоугольных пластин в пространственной постановке / А.Я.Григоренко, А.С.Бергулев. // Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки» Дніпродзержинськ Дніпропетровськ – 2009, С.14.
7. Численное решение задачи об изгибе толстостенных прямоугольных пластин на основе сплайн-аппроксимации / О.Я.Григоренко, А.С.Бергульов, С.М.Яремченко. // Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки 2010» Дніпродзержинськ – 2010 – С.99.
8. Численный анализ напряженного состояния прямоугольных анизотропных пластин в пространственной постановке / А.Я.Григоренко, А.С.Бергулев.

- // XV International Conference Dynamical System Modelling and Stability Investigation, Abstracts of Conference Reports, Kiev, Ukraine, May 25-27, 2011, p.260.
9. Об одном численном подходе к решению задач о статическом поведении прямоугольных пластин в пространственной постановке / А.Я.Григоренко, А.С.Бергульов. // Матеріали IV Міжнародної конференції ім. академіка І.І.Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика», Київ, 2011, – С.65.
 10. Математическая теория упругости. / Ляв А. // М.-Л.: ОНТИ, 1935.-674 с.
 11. Основы расчета упругих оболочек. / Колкунов Н.В. // М.: Высшая школа, 1972.-296 с.
 12. Об одном методе расчета призматических оболочек / Векуа И.Н. // Тр.Тбилис. мат. ин-та.- 1955.- 21.- С.191-259.
 13. Об одном направлении построения теории оболочек. В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т.3. Механика деформируемого твердого тела. / Векуа И.Н. // М.: Наука, 1972.- С. 267-290.
 14. Теория тонких и пологих оболочек переменной толщины. / Векуа И.Н. // Тбилиси: Мецниереба, 1965.-103 с.
 15. Избранные труды: В 2-х т. / Власов В.З. // М.: Изд-во АН СССР, 1962.-Т.1.-528 с.
 16. Теория толстых оболочек на основе метода начальных функций / Волков А.Н. // Прикл. механика - 1971.-7, № 10.-С.42-47.
 17. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек. / Кильчевский Н.А. // В кн.: Теория пластин и оболочек. К.: Изд-во АН УССР, 1962.- С. 58-69
 18. Обобщение современной теории оболочек / Кильчевский Н.А. // ПММ.- 1939.- 2, №4.-С. 427-438.
 19. Основы аналитической механики оболочек. / Кильчевский Н.А. // К.: Наук. думка, 1963.-353 с.

20. Многослойные пластинки и оболочки. / Александров А.Я., Куршин Л.М. // В кн. Тр. VII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1970.- С.714-721.
21. Теория упругих оболочек и пластинок.- В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т.3. Механика деформируемого твердого тела. / Алумзя Н.А. // М.: Наука, 1972.- С.227-266.
22. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития.- 2-е изд. / Болотин В.В. Гольденблатт И.И., Смирнов А.Ф. // М.: Стройиздат, 1972.-191 с.
23. Пластины и оболочки. / Ворович И.И., Шленев М.А. // Итоги науки. Механика, 1963.-М.: ВИНТИ, 1965.-124 с.
24. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям.- В кн.: Исследования по теории оболочек и пластин. / Галинш А.К. // Казань: Изд-во Казан. Ун-та, 1967.- Вып 5.-С.66-92; 1970.-Вып. 6-7.- С.23-64.
25. Современное состояние теории многослойных оболочек / Григолюк Э.И., Коган Ф.А. // Прикл. механика.- 1972.-8, № 6.- С.3-18.
26. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек.- В кн.: Расчет пространственных конструкций. / Куршин Л.М. // М.: Госстройиздат, 1962.- Вып.7.- С.163-192.
27. Обзор современного состояния исследований по трехслойным конструкциям / Хэбип Л.М. // Механика. М.: Мир, 1966.- №2(96).- С. 119-130.
28. О применении полиномов Лежандра к построению уточненной теории трехслойных пластин и оболочек. / Галимов Н.К. // В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казан. Ун-та, 1973.- Вып.10.- С.371-385.
29. Уравнения трехслойных цилиндрических оболочек / Куршин Л.М. // Изв. АН СССР ОНТ, 1958.- №3.- С.142-144.
30. Уравнения трехслойных оболочек с легким наполнителем / Григолюк Э.И. // Изв. АН СССР. ОНТ, 1957.- №1.- С.77-84.

31. Статика упругих слоистых оболочек. / Григолюк Э.И., Коган Е.А. // М.: НИИ Мех. МГУ.-1998.-215 с.
32. О построении уравнений слоистых пластин и оболочек / Хорошун Л.П. // Прикл.механика.- 1978.- 14,№10.- С.3-21.
33. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек / Рассказов А.О. // Прикл. механика.- 1976.- 12, №11.- С. 50-56.
34. Исследование напряженно-деформируемого состояния ортотропных пологих оболочек и пластин на основе сдвиговой теории второго приближения / Пискунов В.Г., Рассказов А.А. // Прикл.механика.-1998.-34,№ 8.-С.103-110.
35. Сдвиговая теория второго приближения для многослойных пологих оболочек и пластин / Пискунов В.Г., Рассказов А.А. // Механика композитных материалов.-Рига.-1998.-34,№3.-С.363-370.
36. Об одной эквивалентной системе уравнений обобщенной теории пологих оболочек / Хома И.Ю. // Прикл.механика.- 1996.-32, №10.-С.74-80.
37. Про рівняння математичної теорії оболонок з початковими напруженнями / Хома І.Ю. // Міжн.наук.конф. “Сучасні проблеми математики”.-Київ.- 1998.- Ч.3.-С.176-180.
38. A two-dimensional model for linear elastic thick shells / Nzengwa R., Tagne Simo V.H. // Int.J.Solids and Struct.-1999.-36, № 34.-P.5141-5176.
39. Магнітопружність при динамічному навантаженні. / Улітко А.Ф., Мольченко Л.В. // К.: Либідь, 1994.-159 с.
40. Розв'язання задачі магніто пружності круглої пластини у двовимірній постановці / Мольченко Л.В., Лоос І.І., Дикий П.В. // Доповіді НАН України.- 2001.-№ 6.-С. 57-61.
41. Влияние внешнего электрического тока на напряженное состояние кольцевой пластины переменной жесткости / Мольченко Л.В. // Прикл.механика.-2001.- 37, №12.-С.108-112.
42. Цилиндрическая оболочка с разрезом, находящаяся в упругой среде / Осадчук В.А., Николишин М.М. // Теор.и прикладная механика.-1985.-Вып.16.

43. Термоупругость тонких оболочек. / Подстригач Я.С., Швец Р.Н. // К.:Наук.думка, 1978.-343 с.
44. Про оптимальний режим нагрівання порожнистого циліндра / Підстригач Я.С., Вігак В.М. // Доп. АН УРСР.Сер.А.-1972.-№12.-С.1105-1108.
45. Об интегрировании системы уравнений упругого равновесия неоднородных по толщине трансверсально-изотропных пластин / Хома И.Ю. // Прикл.механика.- 2002.-38,№11.-С.100-110.
46. Об одном способе построения общего решения уравнений равновесия нетонких пластин / Хома И.Ю. //Прикл.механика.-2001.-37, №4.-С.68-75.
47. Трехмерные модели неоднородных пластин, плит и оболочек / Алибаев С.Г., Галилеев М.Д., Матросов А.В. // Актуальные проблемы механики оболочек: Тез.докл.международ.конф., посвящ. 100-летию проф. Х.М. Муштари, 90-летию проф. К.З. Галимова и 80-летию проф. М.С. Корнишина. Казань. 26-30 июня 2000. Казань: Из-во Ин-та мех.и машиностр.КНЦ РАН,2000.- С.14.
48. Равновесие упругого осесимметрично нагруженного толстостенного цилиндра / Прокопов В.К. // ПММ.- 1949.- 13, №2.-С.135-144.
49. Напряженное состояние толстостенных сферических оболочек под несимметричной нагрузкой / Василенко А.Т., Григоренко Я.М., Панкратова Н.Д. // Прикл. механика.-1982.-18, №4.-С.22-28.
50. Статика анизотропных толстостенных оболочек. / Григоренко Я. М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. // К.: Вища школа, 1985.-190 с.
51. Задачи теории упругости неоднородных тел. / Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. // К.: Наук.думка, 1991.-216 с.
52. Загальна задача про рівновагу пружного конуса / Улітко А.Т. // Прикл. механіка.-1960.-6, №3, с.302-307.
53. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. / Улитко А.Ф. // К.: Наук. Думка, 1979.-264 с.
54. О равновесии конуса и конической оболочки / Шапиро Г.С. // ПММ.- 1944.- 8, №4.- С. 332-336.

55. Некоторые соответствия между функциями напряжений осесимметричной и плоской задач теории упругости для бесконечного полого тяжелого конуса / Александров А.Я. // Изв. Сибирского отд. АН СССР.- 1962.- №2.- С. 15-24.
56. О методе разделения переменных в осесимметричных пространственных задачах теории упругости неоднородных тел. / Колчин Г.Б., Корнеев В.М. // В кн.: Расчет пространственных конструкций. Межвузовский сборник научных трудов.- Куйбышевский госуниверситет, 1979.- С.82-86.
57. Осесимметричная деформация неоднородных тел вращения. / Корнеев В.М. // В кн.: Всесоюзный семинар по теории упругости неоднородного тела. Краткое содержание докладов.- Ереван: Изд. Ереван. Ун-та, 1981.- С.54-56.
58. Устойчивость по двум мерам сжатых осевыми силами упругих цилиндрических тел. / Бурак Я.И., Доманский П.П., Ардан Р.В. // Прикл. механика.-2000.-36, №8.-С.79-86.
59. Расчет и оптимизация оболочек с разными срединными поверхностями / Савула Я.Г., Флейшман Н.П. // Львов:Вища шк.,1989.-172 с.
60. Исследование напряженно-деформируемого состояния упругих тел на основании гетерогенной математической модели / Григоренко Я.М., Савула Я.Г., Коссак О.С. // Прикл. механика.-2000.- 36, №12.-С.31-38.
61. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек / Ворович И.И. // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Механика твердого тела.-М.:Наука,1965.- Вып.3.-С.116-136.
62. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости / Гольденвейзер А.Л. // Прикл. математика и механика.-1962.-26, №4.-С.668-686.
63. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Избранные труды / Власов В.З. // М.: Изд-во АН СССР, 1962.-Т.1.-784 с.
64. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / Пискунов В.Г., Рассказов А.О. // Прикл. механика 2002.-38, №2.-С.22-58.

65. О приближенном методе решения краевых задач теории упругости для фигур, близких к эллипсоиду вращения / Подильчук Ю.Н., Кириченко А.М. // Докл. АН УССР. Сер.А.-1970.-№7.-С. 650-655.
66. Граничные задачи статики упругих тел. / Подильчук Ю.Н. // К.: Наук. Думка, 1984.-304 с.- (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: в 5 т.; Т.1).
67. Методы теоретической физики: В 2-х т.; Т.1 / Морс Ф.М., Фешбах Г. // М.: Изд-во иностр.лит.,1958.-930 с.
68. Трехмерные задачи теории упругости / Подильчук Ю.Н. // К.:Наук.думка,1979.-240 с.
69. Граничные задачи статики упругих тел.-К.:Наук.думка,1984.-304 с.- (Пространственные задачи теории упругости и пластичности :В 6-ти т.; Т.1).
70. Об одном методе решения трехмерных задач механики деформируемых тел, ограниченных произвольными поверхностями / Немиш Ю.Н. // Докл. АН УССР. Сер.А.-1976.- №1.-С.48-52.
71. Асимптотический метод расчета толстостенных оболочек, ограниченных некоординатными поверхностями / Немиш Ю.Н., Чернописский Д.И. // Тр. X Всесоюзн.конф. по теории оболочек и пластин (Кутаиси, 1975). Тбилиси: Мецниереба, 1975.-Т.1.-С.235-243.
72. Упругое равновесие гофрированных тел. / Немиш Ю.Н., Чернописский Д.И. // К.: Наук. Думка.-1983.-188 с.
73. Осесимметричное напряженно-деформируемое состояние трехслойных толстостенных оболочек, близких к сферическим / Немиш Ю.Н., Сагалюк И.С., Чернописский Д.И. // Прикл. механика.-1989.-25, №11.-С.20-25.
74. О напряженно – деформируемом состоянии трехслойных толстостенных оболочек вращения при неидеальном контакте слоев / Немиш Ю.Н., Сагалюк И.С., Чернописский Д.И. // Прикл. механика.-1990.-26, №4.-С.20-25.
75. Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем / Григолюк Э.И. // Изв. АН УССР. Отд-ние техн.наук.-1958.-№1.-С.26-34.

76. Применение теории И.Н. Векуа для решения неклассических задач теории оболочек / Гуляев В.И. // Материалы 1 Всесоюз.школы по теорет.и числ. Методам расчета оболочек и пластин.-Тбилиси,1975.-С.321-351.
77. Приближенное аналитическое решение задач о деформировании круговых неоднородных упругих цилиндров и пластин / Касабеков С.И. // 8 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Пермь, 23-29 авг., 1001: Аннотации докладов. Екатеринбург: Из-во УрОРАН; Пермь: Из-во Ин-та мех.сплош.сред УрОРАН, 2001, с.313.
78. Метод сингулярных интегральных уравнений в пространственной теории упругости / Купрадзе В.Д. // В кн.: Тр. Всесоюз.съезда по теорет.и прикл.механике. М.,Л.: Наука, 1962.
79. Методы потенциала в теории упругости / Купрадзе В.Д. // М.: Физматгиз, 1963, 346с.
80. Трехмерные задачи математической теории упругости / Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. // Тбилиси: Изд-во Тбил.ун-та, 1968,532с.
81. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И. и др // М.: Машиностроение, 1975.-376 с.
82. Введение в теорию разностных схем / Самарский А.А. // М.: Наука, 1971.-552 с.
83. Метод «прогонки» для решения разностных уравнений / Гельфанд И.М., Локуциевский О.В. // В кн.: Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962.- С.283-309.
84. Решение на ЭЦВМ задач о напряженном состоянии конических оболочек переменной жесткости / Григоренко Я.М. // В кн.: ЭЦВМ в строительной механике: Тр. I Всесоюз.совещ.по применению ЭЦВМ в строит.механике, Ленинград, 1963. М.; Л.: Госстройиздат, 1966.- С.535-543.
85. Метод конечных элементов в технике / Зенкевич О. // М.: Мир, 1975.-542 с.
86. Вариант получения функций формы тетраэдрального конечного элемента с первыми производными узловых перемещений / Николаев А.П., Кисилев

- А.П. Дейнего С.Н. // Актуальные проблемы механики оболочек: Тез.докл.международ.конф., посвящ. 100-летию проф. Х.М. Муштари, 90-летию проф. К.З. Галимова и 80-летию проф. М.С. Корнишина. Казань. 26-30 июня 2000. Казань: Из-во Ин-та мех.и машиностр.КНЦ РАН, 2000.-С.218-219.
87. О переносе граничных условий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) / Абрамов А.А. // Журн.вычисл.математики и мат.физики.- 1961.- № 3.- С.542-545.
88. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ / Григоренко Я.М., Мукоед А.П. // К.: Вища школа, 1983.-286 с.
89. Моментная схема конечных элементов (МКЭ) с учетом жестких смещений / Сахаров А.С. // Сопротивление материалов и теория сооружений. - 1974.-Вып. 24.-С. 147-156.
90. МКЭ в механике твердых тел / Под общ.ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха // К.: Вища шк. Головное изд-во, 1982. – 480 с.
91. Расчет криволинейных трубчатых оболочек полуаналитическим методом конечных элементов / Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.-1980.-Вып. 2.-С.168-173.
92. Линейные и нелинейные задачи упругого деформирования оболочек сложной формы и методы их численного решения / Григоренко Я.М. , Савула Я.Г. , Муха И.С. // Прикл. механика.-2000,-36,№ 8,-С.3-26.
93. Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды / Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К. // Прикл.мех. –2002,-38, №6, -С.24-64.
94. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел / Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г. // К.: Изд-во НИИ Строймеханики, 1993.-376 с.
95. Некоторые математические методы решения инженерных задач / Биргер И.А. // М.: Оборонгиз, 1956.-152 с.
96. Применение метода ортогональной прогонки в задачах строительной механики / Дубнер Г.Н. // Изв. Вузов. Машиностроение.- 1968.- № 11.- С.8-14.

97. Методы вычислений / Березин И.С., Жидков Н.П. // М.: Физматгиз, 1962.-Т.2.- 620с.
98. Введение в теорию разностных схем / Годунов С.К., Рябенский В.С. // М.: Физматгиз, 1962.-340 с.
99. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Под ред. Д. Холла, Д. Уайта.- М.: Мир, 1976.-312 с.
100. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Годунов С.К. // Успехи мат.наук.- 1961.-16, № 3.- С. 171-174.
101. Применение метода прогонки для численного решения задач строительной механики / Бидерман В.Л. // Инж.журн. Механика твердого тела.- 1967.- № 5.- С.62-66.
102. Некоторые вычислительные методы решения задач строительной механики, приводимые к обыкновенным дифференциальным уравнениям / Бидерман В.Л. // Расчеты на прочность.-1976.- Вып.17.- С.8-36.
103. Численное решение на ЭЦВМ краевых задач о напряженном состоянии оболочек вращения / Григоренко Я.М., Василенко А.Т. // В кн.: Аннот.докл. V Всесоюз.конф.по теории пластин и оболочек. М.: Наука, 1965.- С.18-19.
104. Применение численных методов к расчету элементов машин / Григоренко Я.М. // Динамика и прочность машин.- 1967.- Вып.5.- С. 11-17.
105. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Беллман Р., Калаба Р. // М.: Мир, 1968.-184 с.
106. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости / Григоренко Я.М. // К.: Наук.думка, 1973.-228 с.
107. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник / Мяченков В.И., Григорьев И.В. // М.: Машиностроение, 1981.-216 с.
108. Функции Коши-Крылова и алгоритмы решения краевых задач теории оболочек / Виноградов А.Ю., Виноградов Ю.И. // Докл.РАН. 2000.- 375, №3.- С.331-333.

109. Пространственные задачи теории упругости / Александров А.Я., Соловьев Ю.И. // М.: Наука, 1978.-462 с.
110. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек / Кильчевский Н.А. // В.кн.: Теория пластин и оболочек. К.: Изд-во АН УССР, 1962.- С.58-69.
111. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости.- 2-е изд.перер.и доп / Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. // М.: Наука, 1976.-663 с.
112. Пространственные задачи теории упругости / Лурье А.И. // М.: Гостехиздат, 1955.-492 с.
113. Теория упругости / Новожилов В.В. // Л. Судпромгиз, 1958.-370 с.
114. Optimal design of cylindrical shells / Yu H.R., Liang B., Li L. // Struct.Optimiz.- 1991.-3, N4.-P252-256.
115. Cylindrical shells under partially distributed radial loading / Yi W., Basavaraju C. // Trans.ASME. J. Pressure Vessel Techol.-1996.-118, N 1.-P.104-108.
116. О пространственном упругом равновесии изотропной цилиндрической оболочки переменной толщины / Немиш Ю.Н., Хома И.Ю., Чернопиский Д.И., Крижановский Е.И. // Прикл.механика.- 1990.-26, №12.- С.7-15.
117. Analysis of the eccentric cylindrical thin shell / Chang M., Chang L.-L. // Appl. Math.and Mech. Engl. Ed.-1994.-15,N9.-P.887-895.
118. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / Гринченко В.Т. // К.: Наук.думка, 1978.-264 с.
119. Прочность полых цилиндров / Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Пасько Д.А. // М.: Машиностроение, 1981.-264 с.
120. Упругость и прочность цилиндрических тел / Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. // М.: Высшая школа, 1975.-526 с.
121. Устойчивость трехмерных деформируемых тел / Гузь А.Н. // К.: Наук.думка, 1971.-276 с.

122. Напряженное состояние симметрично нагруженного кругового цилиндра / Никишин В.С. // М.: ВЦ АН СССР, 1965.-193 с.
123. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально –изотропного материала / Баблюян А.А. // Изв. АН Арм. ССР, сер. ф.-м. н.- 1961.- 14.- С. 61-70.
124. Теория упругости анизотропного тела.-2-е изд.,испр.и доп / Лехницкий С.Г. // М.: Наука, 1977.- 415 с.
125. Оптимізація напружень в пустотілому циліндрі при силовому навантаженні / Бурак Я.Й., Бургій М.І. // Доп. НАН України.-1997.-№9.-С.58-62.
126. Исследование напряженного состояния гофрированных оболочек / Кепич Т.Ю., Сичко В.М., Ковбасенко В.В., Радченко Н.Н. // Конструкция и строит.мех.корабля: Сб.науч.тр.- Николаев.-1989.-С.45-53.
127. Влияние формы поперечного сечения на деформацию замкнутой цилиндрической оболочки / Гусятников А.Ю., Корнеев В.М. // Межвуз.сб.науч.тр.: Куйбыш.архит.-строит.ин-т.-1990.-№13.-С.104-107.
128. Решение задачи о деформации некруговых толстостенных цилиндрических оболочек в пространственной постановке / Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Шевченко С.Н. // Докл. АН УССР.Сер.А.-1985.-№6.-с.31-34.
129. Напряженное состояние толстостенных цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения / Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Шевченко С.Н. // Прикл. механика.-1986.-22, №4.-с. 37-43.
130. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: A survey / Kostas P. Soldatos. // Appl. Mech. Rev.-1999.- V. 58, N8 .
131. Study of the stress state of thick- walled noncircular cylinders in relation to indices of the variability of the load along the generatrix and diretrix / Grigorenko Ya. M., Vlaikov G.G., Shevchenko S.N. // Sov. Appl. Mech.- 1991, 27.- P.231-236.
132. Stress state of hollow orthotropic noncircular cylinders under local loading / Grigorenko Ya. M., Vlaikov G.G., Shevchenko S.N. // Int. Appl. Mech, 1995, 31.- P.331-337.

133. Solution of three-dimensional boundary-value problems for laminated noncircular cylinders / Nemish Y.N. // *Int. Appl. Mech*, 1993, 29.- P.738-744.
134. Об одном подходе к численному решению двумерных задач теории пластин и оболочек с переменными параметрами / Григоренко Я.М., Тимонин А.М. // *Прикл.механика.*- 1987.-23, №6.-С.54-61.
135. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ / Григоренко Я.М., Мукоєд А.П. // К.: "Либідь", 1992.-С.121-126.
136. Исследование напряженного состояния полых эллиптических цилиндров при изменении их эксцентриситета и толщины / Григоренко Я.М., Рожок Л.С. // *Прикл.механика.*-2002.-38, №8.-С.69-82.
137. Дослідження впливу локального навантаження на напружений стан порожнистих циліндрів з еліптичним поперечним перерізом / Рожок Л.С. // *Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат.науки.*-2002.-№3.-С. 134-141.
138. Напряженное состояние полых слоистых неоднородных эллиптических цилиндров при поверхностной нагрузке / Григоренко Я.М., Рожок Л.С. // *Прикл.механика.*-2002.-38, №9.-С.87-96.
139. Расчет напряженного состояния полых цилиндров с гофрами в поперечном сечении / Григоренко Я.М., Рожок Л.С. // *Прикл.механика.*-2002.-38, №12.- С.72-81.
140. К расчету напряженного состояния полых неоднородных эллиптических цилиндров / Григоренко Я.М., Рожок Л.С. // Тези доповідей II Всеукр. наук. конф. "Математичні проблеми технічної механіки".-Дніпродзержинськ.-2002.- С.102.
141. Теория упругости / Тимошенко С.П., Гудьер Дж. // М.: Наука, 1975.-575 с.
142. Елементи теорії пружності / Божидарник В.В., Сулим Г.Т. // Львів: Світ, 1994.-560 с.
143. Статика елементів конструкцій / Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов Н.Г. и др. // К.: «А.С.К.», 1999.-379 с.-(*Механика композитов: В 12 т; Т.8*).

144. Mathematical handbook for scientist and engineers / Korn G.A. and Korn T.M. // New-York: MG Graw-Hill, 1961.- 720 p.
145. Numerical methods for scientist and engineers / Hamming R.W. // New-York: MG Graw-Hill, 1962.- 400 p.
146. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. // М: Наука.-1969.-Т.3.-С.563-565.
147. Методы вычислений / Березин И.С., Жидков Н.П. // М.: Физматгиз, 1959.- Т.1.- 464с.
148. Решение задач теории оболочек методами численного анализа / Григоренко Я. М. // Прикл.механика.-1984.-20, №10.-С.3-22.
149. Расчет оболочечных конструкций на ЭВМ / Мяченков В.И., Григорьев И. В. // М.: Машиностроение, 1981.-216 с.
150. Алгоритмы и программы решения задач механики твердого деформированного тела // Под ред. Я.М. Григоренко.-Л.,1976.-196 с.s
151. Comparasion of elasticity and shell theory solution / Klosner J.M., Kempner J. // AIAA Journ., 1963, 1, №3, p. 627-630.
152. Bending, vibration and buckling of simple thick ortotropic rectangular plates and laminated / Srinivas S., Rao A. K. // Juern J. of solids and structures, 1970, 6, №11, p. 106-113.
153. Thick circular cylindrical shells under aximmetric loading / Jyegar K.T., Sundara R., Chandrastekhara K., Sebastian F.K. // Acta mech., 1975, 23, №12, p.137-144.
154. Решение стационарных задач теории упругости при высокоградиентных нагрузках и локализованных массовых и жесткостных неоднородностях / Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б. // Прикл. механика.- 1998.- 34, №9.- С.39-45.
155. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций / Я.М. Григоренко, Н.Н. Крюков // Прикладная механика. – 1995.– Т. 31, № 6. – С. 3-27.

156. О решении задач статики пологих оболочек и пластин с шарнирно опертыми и жестко закрепленными противоположными краями / Я.М. Григоренко, М.Н. Беренов // Прикладная механика. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 30-35.
157. Static analysis of cylindrical shells by using B-spline functions / P.-C. Shen, J.G. Wang // Ibid. – 1987. – Vol. 25, № 6. – P. 825-831.
158. Применение В-сплайнов к решению задач об изгибе прямоугольных пластин / Я.М. Григоренко, М.Н. Беренов, О. Овлякулиев // Вычислительная и прикладная математика. – 1988. – № 66. – С. 47-51.
159. G. Solution of static cylindrical shells problems by spline functions / J.-G. Wang, P.-C. Shen // China Civ. Eng. J. – 1984 – Vol. 17, № 2. – P. 75-85.
160. Application of bivariate B-splines to a plate bending problem / C.R. Traas // Trends. Appl. Mech.: Proc. 7-th Symp. Berlin etc. – 1988. – P. 290-296.
161. Free vibration analysis of doubly curved shells by spline finite strip method / W.Y. Li, L.G. Tham, Y.K. Cheung // J. Sound and Vibration. – 1990. – Vol. 140, № 1. – P. 39-53.
162. Review on application of spline functions to structural analysis / T.A. Mizusawa // Bull. Daido Inst. Technol. – 1989. – Vol. 25. – P. 199-212.
163. Сплайн-функции в задачах теории оболочек неканонической формы / В.И. Мамай, Т.Д. Кудрина, Т.Н. Ананченко и др. // М.: 1994. – 53 с. – (Препринт № 7-94 / Ин-т механики МГУ).
164. Численное решение задачи параметризации для анализа оболочек произвольной формы / М.Ю. Малинин, В.Ф. Снигирев // Прикл. пробл. прочн. и пластичн.: Алгоритмиз. и автоматиз. науч. исслед. – Горький. – 1988. – С. 67-74.
165. К расчету оболочек сложной геометрии в цилиндрических координатах на основе сплайнового варианта МКЭ / М.С. Корнишин, Н.М. Якупов // Прикладная механика. – 1989. – Т. 25, № 8. – С. 53-60.
166. Расчет напряженно-деформированного состояния оболочек сплайновым вариантом МКЭ / Ф.Г. Ахмадиев, Н.М. Якупов, Х.Г. Киямов, С.Н. Якупов, И.Х. Киямов // Материалы двадцатой международной научной конференции

[“Математические методы в технике и технологиях”], (Ярославль, 28-31 мая 2007г).

167. Mixed spline finite element analysis of shells of revolution / H. Wan // *Comput. Mech.* '88: Theory and Appl.: Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci. –Berlin. – Vol. 1. – 1988. – P. 22.VII.1-22.VII.2.
168. The multivariable spline method for analysis of shallow shells based on Hu-Washizu principle / D. Shen, D. He, X. Shen // *China Civ. Eng. J.* – 1996. – Vol. 29, № 4. – P. 11-20.
169. Методы расчета оболочек: в 5 т. / [АН УССР. Институт механики]. – Киев.: Наукова думка. – Т. 4: Теория оболочек переменной жесткости.– 1981. – 543 с.

Люблю **книги**
ljubljudknigi.ru



yes
i want morebooks!

Покупайте Ваши книги быстро и без посредников он-лайн - в одном из самых быстрорастущих книжных он-лайн магазинов! Мы используем экологически безопасную технологию "Печать-на-Заказ".

Покупайте Ваши книги на
www.ljubljudknigi.ru

Buy your books fast and straightforward online - at one of world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at
www.get-morebooks.com

VDM Verlagsservicegesellschaft mbH

Heinrich-Böcking-Str. 6-8
D - 66121 Saarbrücken

Telefon: +49 681 3720 174
Telefax: +49 681 3720 1749

info@vdm-vsg.de
www.vdm-vsg.de

